

2016新东方考研数学 点题讲义

2015.12.18

朱杰



新东方
在线

www.koolearn.com

网络课堂
电子教材
系列

一、高等数学部分 (34)

第 1 章 函数 极限 连续 (5)

【例 1】

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+2 \tan x)^x - 3^x}{3 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}}$$

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x}}{3 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x}}{3x^2} = 0$, 所以 $3 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x} \sim 3 \sin^2 x \sim 3x^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+2 \tan x)^x - 3^x}{3 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+2 \tan x)^x - 3^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \left[\left(1 + \frac{2}{3} \tan x\right)^x - 1 \right]}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(1 + \frac{2}{3} \tan x\right)} - 1}{3x^2} \quad (\text{利用等价无穷小 } e^x - 1 \sim x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left(1 + \frac{2}{3} \tan x\right)}{3x^2} \quad (\text{利用等价无穷小 } \ln(1+x) \sim x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{2}{3} \tan x}{3x^2} \quad (\text{利用等价无穷小 } \tan x \sim x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{2}{3} x}{3x^2} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

新东方在线

www.koollearn.com

网络课堂电子教材系列

【例 2】

$$\text{求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{(n+i-1)(n+i)}{n^4}}$$

解:

$$\text{因为 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) < \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{(n+i-1)(n+i)}{n^4}} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \int_0^1 (1+x) dx = \frac{3}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) = \int_0^1 (1+x) dx = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{(n+i-1)(n+i)}{n^4}} = \frac{3}{2}.$$

【例 3】

(1) 设 $f(x) = x^2$, $f(\varphi(x)) = -x^2 + 2x + 3$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域与值域;(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 (n-i) \frac{1}{n + \varphi(x)}$

$$\text{解: (1) } \varphi^2(x) = -x^2 + 2x + 3 \quad \varphi(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \quad -x^2 + 2x + 3 \geq 0,$$

$$\text{即 } (x-3)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3, \quad (-x^2 + 2x + 3)' = -2x + 2 = 0, \quad x = 1.$$

$$\varphi(-1) = \varphi(3) = 0 \text{ (最小值)}, \quad \varphi(1) = 2 \text{ (最大值)}, \quad \therefore \varphi(x) \in [0, 2].$$

$$(2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n+2} \leq \text{原式} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{12}, \text{原式} = \frac{1}{12}.$$

【例 4】

- (1) 证明方程 $x = 2\ln(1+x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根 ξ ;
- (2) 任意取 $x_1 > \xi$, $x_{n+1} = 2\ln(1+x_n)$ ($n=1, 2, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

解: (1) $\varphi(x) = x - 2\ln(1+x)$, $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x},$$

$$\varphi'(x) = 0, \quad x = 1 \quad (\text{唯一})$$

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	$0 \searrow$	$1 - 2\ln 2$	$\nearrow +\infty$

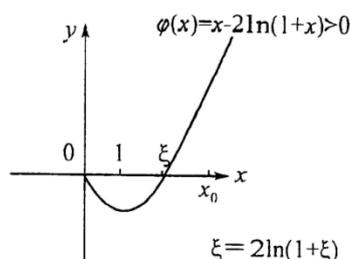
$\Rightarrow \exists$ 唯一 $\zeta \in (1, +\infty)$, 使 $\varphi(\zeta) = 0$

$$(2) \quad x_1 > \xi, \quad \xi = 2\ln(1+\xi) < x_2 = 2\ln(1+x_1) < x_1 \quad (\varphi(x_1) > 0)$$

$$\text{设: } \xi < x_n < x_{n-1} \Rightarrow \xi = 2\ln(1+\xi) < x_{n+1} = 2\ln(1+x_n) < x_n \quad (\varphi(x_n) > 0)$$

故, $\{x_n\}$ 单调减且有下界。

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在, 在 $x_{n+1} = 2\ln(1+x_n)$ 两边取极限。得 $a = 2\ln(1+a)$, $a = \xi$ 。



新东方
在线

网络课堂电子教材系列

【例 5】设可导函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $a < f(x) < b$, $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| < 1$,

(I) 证明: $x = f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一实根 x^* ;

(II) 任意 $x_0 \in [a, b]$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

解:

(I) 令 $F(x) = f(x) - x$, 因为 $F(a) = f(a) - a > 0$, $F(b) = f(b) - b < 0$, 由零点定理得存在 $x^* \in (a, b)$, 使 $F(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$. (下面证唯一性).

由 $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| < 1 \Rightarrow -1 < f'(x) < 1$, 得 $F'(x) = f'(x) - 1 < 0$, 则 $F(x)$ 单调递减.

综上, $x = f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一实根 x^* .

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)) - \frac{1}{2}(x_{n-1} + f(x_{n-1})) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}(f(x_n) - f(x_{n-1})) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f'(\xi)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})[1 + f'(\xi)] \end{aligned}$$

得 $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = 1 + f'(\xi) > 0 \Rightarrow \{x_n\}$ 单调.

又 $a \leq x_0 \leq b$,

$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + f(x_0)) \in [a, b], \dots, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + f(x_{n-1})) \in [a, b]$, 则 $\{x_n\}$ 有界.

所以 $\{x_n\}$ 有极限, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k$, 由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ 两边取极限得

$$k = \frac{1}{2}(k + f(k)) \Rightarrow k = f(k) \Rightarrow k = x^*.$$

综上, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

新东方
在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

第 2 章 一元函数微分学 (7)

【例 1】

设 $f(x)$ 是多项式函数, 其最高次幂项的系数为 1. 已知曲线 $y = f\left(\sin \frac{\pi x}{2}\right) - \sin f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处与 x 轴相切, 试求次数最低的多项式 $f(x)$ 的表达式.

解: 易知方程 $x - \sin x = 0$ 有唯一解 $x = 0$ 。

由题设 $y|_{x=0} = y|_{x=1} = 0$, 即 $f(0) - \sin f(0) = 0$, $f(1) - \sin f(1) = 0$

故 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ 。

$$\text{又} \quad y' = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot f' \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) - \cos f(x) \cdot f'(x)$$

由题设 $y'|_{x=0} = y'|_{x=1} = 0$, 即

$$\frac{\pi}{2} f'(0) - \cos f(0) f'(0) = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) f'(0) = 0$$

$$\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} f'(1) - \cos f(1) f'(1) = -f'(1) = 0$$

可知 $f'(0) = f'(1) = 0$ 。

由多项式性质知, 所求多项式为 4 次多项式, 故设

$$f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad \text{则有} \quad f'(x) = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx + d,$$

将 $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1)$ 代入上式, 则得 $b = -2, c = 1, d = 0, e = 0$, 故所求多项式为 $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ 。

新东方
在线

海

系列

【例 2】

设可导函数满足 $f'(x) \geq M > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$, 则在下列哪个区间上 $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$ ().

- (A) $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ (B) $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$ (C) $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$ (D) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

解: 因为 $f'(x) \geq M > 0$, 所以 $f(x) \nearrow$.

$$\text{由 } f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{2}{4}\right) = f'(\xi) \cdot \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}M,$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}M = \frac{1}{4}M, \text{ 又 } f(x) \nearrow, \text{ 所以 } \left[\frac{3}{4}, 1\right] \text{ 上 } |f(x)| \geq \frac{1}{4}M.$$

【例 3】设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 0, f''(x) < 0, 0 < a < b$, 当 $a < x < b$ 有下列 () 成立.

(A) $af(x) > xf(a)$ (B) $bf(x) > xf(b)$

(C) $xf(x) < bf(b)$ (D) $xf(x) > af(a)$

解: (A)、(B) 利用 $\frac{f(x)}{x}$ 的单调性; (C)、(D) 利用 $xf(x)$ 的单调性.

令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)x - [f(x) - f(0)]}{x^2} \\ &= \frac{f'(x)x - f'(\xi)x}{x^2} \quad (0 < \xi < x) \\ &= \frac{[f'(x) - f'(\xi)]x}{x^2} \end{aligned}$$

因为 $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x) \downarrow \Rightarrow f'(x) < f'(\xi)$, 故 $F'(x) < 0$, 所以 $\frac{f(x)}{x} > \frac{f(b)}{b}$, (B) 正确.

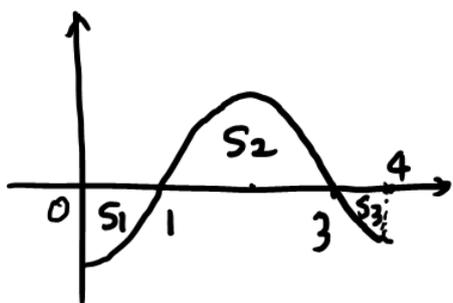
新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂电子教案系列

【例 4】

$f'(x)$ 图像如下图所示, 已知 $f(0) = 2$, 下图区域的面积为 $S_1 = 3, S_2 = 4, S_3 = 2$,



则 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上的最大值=_____, 最小值=_____.

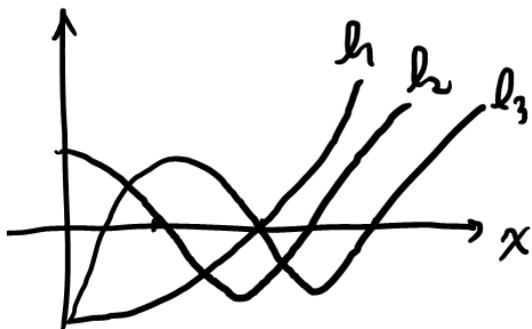
解: $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(x)dx = 2 + (-3) = -1$; (最小值)

$f(3) = f(1) + \int_1^3 f'(x)dx = -1 + 4 = 3$; (最大值)

$f(4) = f(3) + \int_3^4 f'(x)dx = 3 - 2 = 1$.

【例 5】比较积分大小 $\int_0^\pi (\sin x + 3)dx$ _____ $\int_\pi^{2\pi} (\sin x + 3)dx$

【例 6】 $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ 的图像汇总在下列一张图中, 则 l_1, l_2, l_3 分别对应 ().



(A) $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$

(B) $y = f'(x)$, $y = f(x)$, $y = f''(x)$

(C) $y = f''(x)$, $y = f(x)$, $y = f'(x)$

(D) $y = f''(x)$, $y = f'(x)$, $y = f(x)$

解: 由图像知选 D.

新东方
在线

www.koolarn.com

网络课堂
电子教材系列

【例 7】(数学三)

设某产品的成本函数为 $C(q) = \alpha q^2 + 2q + \beta$, 需求函数为

$$q = \frac{1}{\gamma}(4-p), \text{ 其中 } C \text{ 为成本, } q \text{ 为需求量 (即产量), } p \text{ 为该商品的单价,}$$

α, β, γ 都是正常数, 求:

- (1) 利润最大的产量和最大利润;
- (2) 需求对价格的弹性;
- (3) 需求对价格的弹性的绝对值为 1 时的产量.

解:

$$\begin{aligned} \text{(I) 利润 } L &= R - C = pq - \alpha q^2 - 2q - \beta \\ &= (4 - \gamma q)q - \alpha q^2 - 2q - \beta = -(\alpha + \gamma)q^2 + 2q - \beta. \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{dL}{dq} = -2(\alpha + \gamma)q + 2 = 0, \text{ 解之得 } q_0 = \frac{1}{\alpha + \gamma} \text{ 且 } L''(q_0) = -2(\alpha + \gamma) < 0,$$

$$\text{故当产量 } q_0 = \frac{1}{\alpha + \gamma} \text{ 时, 利润最大, 且最大利润为 } L(q_0) = \frac{1}{\alpha + \gamma} - \beta.$$

$$\text{(II) 需求对价格弹性为 } \varepsilon = p \frac{q'(p)}{q(p)} = p \frac{-\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}(4-p)} = -\frac{p}{4-p}.$$

$$\text{(III) 当 } |\varepsilon| = 1 \text{ 时, 有 } \left| -\frac{p}{4-p} \right| = \frac{p}{4-p} = 1, \text{ 解得 } p = 2, \text{ 此时产量 } q = \frac{1}{\gamma}(4-2) = \frac{2}{\gamma}.$$

新东方
在线

教材系列

第3章 一元函数积分学 (5)

【例1】 $4y = \int_0^2 x\sqrt{12-x^2u^2} du$, 求 y' .

解: $\int_0^2 x\sqrt{12-x^2u^2} du \xrightarrow{\text{令 } xu=t} \int_0^{2x} \sqrt{12-t^2} dt$,

则 $4y = \int_0^{2x} \sqrt{12-t^2} dt$, 所以 $y' = \frac{1}{4}\sqrt{12-4x^2} \cdot 2 = \sqrt{3-x^2}$.

【例2】

求 $\int_0^{2016\pi} (\sin x + \cos^2 x) \cos^2 x dx$

【解析】

$$\begin{aligned} & \int_0^{2016\pi} (\sin x + \cos^2 x) \cos^2 x dx \\ &= 1008 \int_{\pi}^{\pi} (\sin x + \cos^2 x) \cos^2 x dx = 1008 \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \cos^4 x dx \\ &= 2016 \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = 2016 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

【例3】

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$, 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$

解: $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{\text{令 } x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1 - \sin^2 t) dt = b_n - b_{n+2}$

又 $b_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} b_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} (b_n - \frac{n+1}{n+2} b_n) = 0$.

新东方
在线

课堂
电

【例 4】 设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$, $f(0) = 0$, 则 $I = \int_0^1 f(x)dx =$ _____ .

解: $I = \int_0^1 f(x)dx = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx$

$$= f(1) - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 dx$$
$$= f(0) + \int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 dx$$
$$= 0 + \int_0^1 \arcsin(x-1)^2 dx - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 dx$$
$$= \int_0^1 (1-x) \arcsin(1-x)^2 dx$$

令 $1-x=t$ $\int_1^0 t \arcsin t^2 (-dt)$

$$= \int_0^1 t \arcsin t^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin t^2 dt^2$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂
电子教材系列

【例 5】

求曲线 $y = \int_0^x e^{-t^2} dt$ 与其渐近线及 y 轴所围图形面积

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \stackrel{t=-u}{=} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} (-du) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

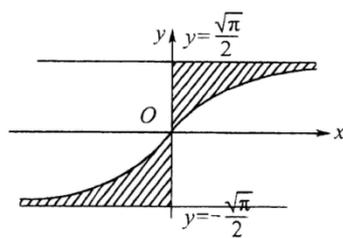
$$S = 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right) dx$$

$$= 2 \left[x \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \cdot (-e^{-x^2}) dx \right]$$

$$= 2 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) \right]$$

$$= 2 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} \right] = 2 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= 2 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} + \frac{1}{2} \right] = 1.$$



新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂电子教材系列

第4章 多元函数微分学 (3)

【例1】

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2} = 1, \text{ 则}$$

- (A) $f(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 极大值 (B) $f(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 极小值
 (C) $f(0,0)$ 不是极值 (D) 不能确定 $f(0,0)$ 是否为极值

解: $\varphi(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$, $\varphi_x = 3x^2 - 6x$, $\varphi_y = 3y^2 - 6y$

$$A = \varphi_{xx} = 6x - 6|_{(0,0)} = -6 \quad B = \varphi_{xy} = 0 \quad C = \varphi_{yy} = 6y - 6|_{(0,0)} = -6$$

$$AC - B^2 = 36 > 0 \quad A = -6 < 0 \quad \therefore \varphi(0,0) = 0 \text{ 极大值}$$

由保号得 $f(x,y) < f(0,0)$, $f(0,0)$ 极大值。选 A。

【例2】

函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有二阶连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0$, $F_x(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) > 0$, $F_{xx}(x_0, y_0) < 0$, 证明由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 在 x_0 取极小值。

解: 在方程 $F(x,y) = 0$ 两边对 x 求导, 得: $F_x(x,y) + F_y(x,y) \frac{dy}{dx} = 0$ (1)

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = 0, \text{ 在 (1) 两边再对 } x \text{ 求导, 得}$$

$$F_{xx}(x,y) + F_{xy}(x,y) \frac{dy}{dx} + F_y(x,y) \frac{d^2y}{dx^2} + \left[F_{yx}(x,y) + F_{yy}(x,y) \frac{dy}{dx} \right] \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

将 $x = x_0$, $y = y_0$ 代入, 得: $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(x_0, y_0)} = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} > 0$

故 x_0 为 $y = y(x)$ 极小值点。

【例 3】

函数 $z = f(x, y)$ 的全增量 $\Delta z = (2x - 3)\Delta x + (2y + 4)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$,

且 $f(0, 0) = 0$ 。

(1) 求 z 的极值; (2) 求 z 在 $x^2 + y^2 = 25$ 上最值; (3) 求 z 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上最值。

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 4, z = x^2 - 3x + \varphi(y), \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(y) = 2y + 4 \quad \therefore$

$\varphi(y) = y^2 + 4y + c, z = x^2 - 3x + y^2 + 4y + c, \text{ 由 } f(0, 0) = 0, \text{ 得}$

$c = 0, z = x^2 - 3x + y^2 + 4y$

(1) 由 $\begin{cases} z_x = 2x - 3 = 0 \\ z_y = 2y + 4 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = -2 \end{cases} \quad A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

$\therefore AC - B^2 = 4 > 0, A = 2 > 0, \text{ 故 } z\left(\frac{3}{2}, -2\right) = -6.25 \text{ 为极小值。}$

(2) $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$

由 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -4 \end{cases} \quad z(3, -4) = 0 \quad (\text{最小值})$

及 $\begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = 4 \end{cases} \quad z(-3, 4) = 50 \quad (\text{最大值})$

(3) 最小值 -6.25, 最大值 50。

第 5 章 二重积分 (4)

【例 1】

$$\text{求 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}} - 1} \int_0^t dx \int_x^t e^{(x-y)^2} dy .$$

【解析】

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}} - 1} \int_0^t dx \int_x^t e^{(x-y)^2} dy &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dy \int_0^y e^{(x-y)^2} dx}{\frac{1}{2}t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t e^{(x-t)^2} dx}{t} \\ &\stackrel{x-t=u}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_t^0 e^{u^2} du}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -e^{(-t)^2} \cdot (-1) = e^0 = 1 . \end{aligned}$$

【例 2】 设 $f(x, y) = x^2 + y^2 - x + y - 1 + \iint_D f(u, v) du dv$, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 区域 D 满足 $x^2 + y^2 \leq 4 (x \geq 0, y \geq 0)$, 求 $f(x, y)$.解: 令 $\iint_D f(u, v) du dv = A$, 原式两边在 D 上积分得到

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2 - x + y - 1) dx dy + A \iint_D dx dy$$

区域 D 关于 $y = x$ 对称, 利用轮换对称性得到

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2 - x + y - 1) dx dy &= \iint_D \frac{(x^2 + y^2 - x + y - 1) + (y^2 + x^2 - y + x - 1)}{2} dx dy \\ &= \iint_D (x^2 + y^2 - 1) dx dy = \pi . \end{aligned}$$

由原式为 $A = \pi + A \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2$, 得 $A = \frac{\pi}{1-\pi}$, 所以

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x + y - 1 + \frac{\pi}{1-\pi} .$$

【例 3】

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且单调增加, 证明 $\iint_D yf(y)d\sigma > \frac{b^2 - a^2}{2} \int_a^b f(x) dx$ 。其中 $D: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \iint_D yf(y) dx dy - \int_a^b x dx \cdot \int_a^b f(y) dy &= \iint_D yf(y) dx dy - \iint_D xf(y) dx dy \\ &= \iint_D f(y)(y-x) dx dy \stackrel{x \leftrightarrow y}{=} \iint_D f(x)(x-y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (y-x)(f(y) - f(x)) dx dy > 0 \end{aligned}$$

【例 4】(数学一、二)

求由 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0), y = 0$ 所围均匀薄片质心位置。

$$\text{解: 设质心坐标 } (\bar{x}, \bar{y}), \text{ 由对称性, } \bar{x} = \pi a, \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{S}$$

$$\text{而 } S = \int_0^{2\pi} y(x) dx = \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \int_0^{a(1 - \cos t)} a^2 (1 - \cos t)^2 dt,$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{y(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2(x) dx = \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \frac{1}{2} \int_0^{a(1 - \cos t)} a^3 (1 - \cos t)^3 dt.$$

综上,

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{S} = \frac{5}{6} a$$

新东方
在线
网络课
子教材系列

www.koollearn.com

第 6 章 微分方程 (2)

【例 1】

设函数 $y = f(x)$ 满足微分方程 $y + y' = \frac{e^{-x} \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, 且 $f(\pi) = 0$, (1) 求 $f(x)$

表达式; (2) 求曲线 $y = f(x), x \geq 0$ 绕轴旋转一周的体积。

解: (1) 解一阶线性微分方程, 得 $f(x) = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ 。

(2)

$$\begin{aligned} V &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \pi \int_0^{\pi} e^{-4n\pi-2t} \sin t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \pi e^{-4n\pi} \int_0^{\pi} e^{-2t} \sin t dt \\ &= \frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n\pi} = \frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5} \cdot \frac{1}{1-e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})} \end{aligned}$$

【例 2】

设 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 0$,

$g(0) \neq 0$, 求 $F(x)$ 表达式。

$$\text{解: } F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g^2(x) - f^2(x)}{g^2(x)} = 1 - \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = 1 - F^2(x)$$

$$F(0) = 0, \text{ 解得 } F(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

新东方
在线

jolea

441

材
系
列

第7章 无穷级数 (4)

【例1】

1)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛

解: 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 知 $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S, a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 前 n 项

和 $\sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n a_{n+1} = S_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$, 故收敛。

2)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。

解: 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛于 s , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$, 其中

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s + a_0$, 则存在 M , 使对一切 n , 有 $|a_n| \leq M$ 。又 $|a_n b_n| \leq M |b_n|$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。

3)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛

解: 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 则存在 M , 使对一切 n , 有 $|b_n| \leq M$ 。又 $|a_n b_n| \leq M |a_n|$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。

新东方在线

络课堂电子教

【例 2】

$$a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx, \text{ 求 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} \right)$$

解:

$$a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x |\sin x| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (k\pi + t) |\sin t| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (k\pi + t) \sin t dt = n^2 \pi.$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

【例 3】(数学一)

将函数 $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$ 展开为 $x-2$ 的幂级数

解: 方法一

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2) = \ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(3 + (x-2)) + \ln(4 + (x-2))$$

$$= \ln 3 \left(1 + \frac{x-2}{3} \right) + \ln 4 \left(1 + \frac{x-2}{4} \right) = \ln 3 + \ln 4 + \ln \left(1 + \frac{x-2}{3} \right) + \ln \left(1 + \frac{x-2}{4} \right)$$

$$= \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n 3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n 4^n}, -1 < x \leq 5$$

$$= \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right) \frac{(x-2)^n}{n}, -1 < x \leq 5.$$

$$\text{方法二: } f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-2)+3} + \frac{1}{(x-2)+4}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-2}{3}} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{x-2}{4}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n}, -1 < x < 5$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-2)^n, -1 < x < 5$$

$$\int f'(x) dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-2)^n \right) dx$$

$$\text{即 } f(x) - f(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_2^x (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-2)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} \right) \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$$

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂
电子教材系列

在 $x = -1$ 时, $f(x)$ 无意义, $x = 5$ 时, 级数收敛, 故收敛域是 $-1 < x \leq 5$ 。

$$\text{即 } f(x) = \ln 12 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} \right) \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}, -1 < x \leq 5 .$$

【例 4】(数学一)

函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, 将函数 $f(x)$ 展成傅

里叶级数。

解: $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad x \in (-\infty, +\infty), x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

新东方
在线

arn.com

网络课堂
电子教材系列

第 8 章 多元微积分续 (数一) (4)

【例 1】

曲面 $\Sigma: Z = x + f(y - z)$, 其中 f 可微, 则曲面 Σ ()

- (A) 是柱面 (B) 是锥面
(C) 即不是柱面也不是锥面 (D) 不能确定

解: 选 A. $\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (1, f', -f' - 1)$, $1 + f' - f' - 1 = 0$,
即 $1 \times 1 + f' \times 1 + (-f' - 1) \times 1 = 0$, $\therefore \mathbf{S} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{S}$ 。

【例 2】

设曲线 L 是 $y' = f(x, y)$ 一条封闭曲线的正向,

其所围的面积为 A , 则 $I = \oint_L xf(x, y)dx - \frac{y}{f(x, y)}dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \oint_L xf(x, y)dx - \frac{y}{f(x, y)}dy \\ &= \oint_L xy'dx - \frac{y}{f(x, y)}f(x, y)dx \\ &= \oint_L xdy - ydx \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Green}}{\iint_D} (1+1)d\sigma = 2A .$$

【例 3】

Σ 为曲面 $Z = x^2 + y^2$ 被平面 $Z = 1$ 所截的有限部分, 取上侧, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma_{\text{侧}}} P dydz + Q dzdx + R dxdy = (\quad)$$

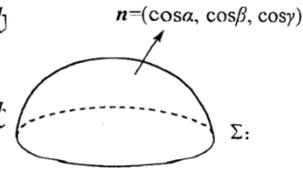
$$(A) \iint_{\Sigma_{\text{侧}}} (2xP - 2yQ + R) dxdy$$

$$(B) \iint_{\Sigma_{\text{侧}}} (-2xP + 2yQ + R) dxdy$$

$$(C) \iint_{\Sigma_{\text{侧}}} (-2xP - 2yQ + R) dxdy$$

$$(D) \iint_{\Sigma_{\text{侧}}} (2xP + 2yQ + R) dxdy$$

解: $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

$$\begin{cases} dydz = dS \cos \alpha & (1) \quad dydz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy = \frac{F_x}{F_z} dxdy = \frac{2x}{-1} dxdy \\ dzdx = dS \cos \beta & (2) \quad dzdx = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dxdy = \frac{F_y}{F_z} dxdy = \frac{2y}{-1} dxdy \\ dxdy = dS \cos \gamma & (3) \quad \dots \end{cases}$$


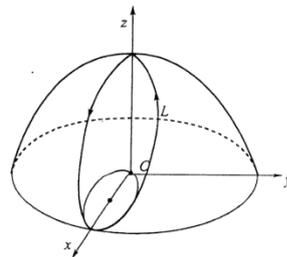
$$\mathbf{n} = \pm(F_x, F_y, F_z) \Rightarrow \pm\left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}\right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \quad \Sigma: x^2 + y^2 - z = 0, \text{选 C.}$$

【例 4】

求 $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 L 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases} (R > 0, Z \geq 0)$,

从 z 轴正向看逆时针方向。

解: 法 1: 设参数, 化定积分, $L: \begin{cases} x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t \\ y = \frac{R}{2} \sin t \\ z = R \sin \frac{t}{2} \end{cases},$



代入

$$\begin{aligned} & \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R^3}{8}\right) \sin^3 t dt + \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{2} \cdot \frac{1-\cos t}{2} \cdot \cos t dt + \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^3}{8} + \frac{R^3}{8} \cos^2 t + \frac{R^3}{4} \cos t\right) \cdot \cos \frac{t}{2} dt \\ &= -\frac{1}{4} \pi R^3 \end{aligned}$$

法 2: 斯托克斯公式。\$\Sigma\$: 球面 \$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\$ 上 \$L\$ 围成部分, 取上侧

$$\mathbf{n} = \pm(2x, 2y, 2z) // \pm(x, y, z) \xrightarrow{\text{单位}} \pm\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \text{取正号}$$

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} dS = -\frac{2}{R} \iint_{\Sigma} (yz + zx + xy) dS = -\frac{2}{R} \iint_{\Sigma} zxdS$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{R} \iint_{D_{xy} \left\{ \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}} x \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = -2 \iint_{D_{xy}} x dx dy = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{R \cos \theta} r \cos \theta \cdot r dr \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{R \cos \theta} = -\frac{2}{3} R^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = -\frac{4}{3} R^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} R^3. \end{aligned}$$

$$\text{注: } 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

新东方
在线

3 网络课堂电子教材系列

二、线性代数部分 (16)

第 1 部分 行列式与矩阵 (3)

【例 1】

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 3 阶相似非零矩阵, 矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = \mathbf{A}_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, \mathbf{A}_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 矩阵 \mathbf{B} 满足 $|\mathbf{E} + 2\mathbf{B}| = |\mathbf{E} + 3\mathbf{B}| = 0$, 行列式 $|\mathbf{A}^* \mathbf{B} - \mathbf{A}^* + \mathbf{B} - \mathbf{E}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解】 $|\mathbf{A}^* \mathbf{B} - \mathbf{A}^* + \mathbf{B} - \mathbf{E}| = |\mathbf{A}^*(\mathbf{B} - \mathbf{E}) + (\mathbf{B} - \mathbf{E})|$

$$= |(\mathbf{A}^* + \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E})| = |\mathbf{A}^* + \mathbf{E}| \cdot |\mathbf{B} - \mathbf{E}|$$

由 $a_{ij} = \mathbf{A}_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 可知, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^*$, 于是

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} \Rightarrow |\mathbf{A}\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|^3 \Rightarrow |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}|^3 \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \text{ 或 } |\mathbf{A}| = 1.$$

因为 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, 不妨假定 $a_{11} \neq 0$, 所以

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + a_{13}\mathbf{A}_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0,$$

故 $|\mathbf{A}| = 1$.

又由题设可知, \mathbf{A}, \mathbf{B} 相似, 所以 \mathbf{A}, \mathbf{B} 有相同的特征值, 且 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| = 1$.

由 $|\mathbf{E} + 2\mathbf{B}| = |\mathbf{E} + 3\mathbf{B}| = 0$ 可知, \mathbf{B} 有特征值 $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{3}$, 设另外一个特征值为 λ_3 , 则有 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 6$. 所以 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的特征值为 $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_3 = 6$.

于是

$$|\mathbf{A}^* + \mathbf{E}| = |\mathbf{A}^T + \mathbf{E}| = |\mathbf{A} + \mathbf{E}| = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{7}{3},$$

$$|\mathbf{B} - \mathbf{E}| = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1) = (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot 5 = 10.$$

$$\text{故 } |\mathbf{A}^* \mathbf{B} - \mathbf{A}^* + \mathbf{B} - \mathbf{E}| = \frac{70}{3}.$$

【例 2】

对三阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第一行与第三行, 然后将第二列的 -2 倍加到第三列得 $-E$, 且 $|A| > 0$, 则 A 等于 ().

$$(A) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (B) - \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & -2 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$(C) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

【解】 由 $-E = E_{13}A^*E_{23}(-2)$ 得 $A^* = -E_{13}^{-1}E_{23}^{-1}(-2)$,

因为 $|A^*| = |A|^2 = 1$ 且 $|A| > 0$, 所以 $|A| = 1$, 于是 $A^* = A^{-1}$, 故

$$\begin{aligned} A &= (A^*)^{-1} = -E_{23}^{-1}(2)E_{13}^{-1} = -E_{23}(-2)E_{13} \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 选(A)}. \end{aligned}$$

新东方
在线

www.koolearn.com

网络课堂
电子教材系列

【例 3】

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与矩阵 A 等价、合同但不相似的是 ().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【答案】(D)

【分析】由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$, 可知矩阵 A 的特征是 $3, -3, 0$, 故秩

$\gamma(A) = 2$, 二次型 $x^T Ax$ 的正、负惯性指数均为 1.

(A) 中矩阵的秩为 1, 不可能与矩阵 A 等价; (C) 中矩阵的特征值为 $3, -3, 0$. 与矩阵 A 不仅等价、合同, 而且也是相似的, 不符合题意. 对于 (D), 记其矩阵为 D , 由

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1),$$

可知 D 的特征值为 $1, -1, 0$. $x^T Ax$ 与 $x^T Dx$ 的正、负惯

性指数一样, 所以它们合同但不相似 (因为特征值不同), 符合题意, 故应选 (D).

注意, (B) 中矩阵的特征值为 $1, 4, 0$, 正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 与 A 即不合同也不相似, 但等价 (因为秩相等)

新东方
在线

课堂
电子
教材
系列

第 2 部分 方程组与向量组 (6)

【例 1】

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta$ 的秩为 r . 已知 $r(A) = s$, 且 $AX = \alpha$ 有解, $r(B) = t$, 且 $BX = \beta$ 无解, 则()

- (A) $r = s + t$ (B) $r = s + t + 1$ (C) $r \leq s + t$ (D) $r \leq s + t + 1$

【详解】应选 (D)

由 $AX = \alpha$ 有解, $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = s$,

而 $BX = \beta$ 无解, $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta) \neq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$,

由于 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = t$, 则 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta) = t + 1$,

$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha) + r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta) = s + t + 1$.

【例 2】

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $A^*X = 0$ 的基础解系可为()

- (A) α_1, α_3 (B) α_1, α_2 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

【详解】应选 (D)

由 $(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 得 $4 - r(A) = 1$, $r(A) = 3$, 则 $r(A^*) = 1$, $4 - r(A^*) = 3$, 故 $A^*X = 0$ 的基础解系含有 3 个解向量.

又由于 $A^*A = |A|E = 0$, 即 $A^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $A^*X = 0$ 的解.

因为 $(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ 是方程组 $AX = 0$ 的解, 所以 $\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = 0$, 即 α_1, α_3 线性相关, 则 $A^*X = 0$ 的基础解系只可为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.



【例 3】

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$, 当参数 x, y 满足什么条件时

矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解.

解: 记 $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, 则 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow Ax = b_1$ 和 $Ax = b_2$ 都有解.

$BY = A$ 无解 $\Leftrightarrow By = a_1$ 和 $By = a_2$ 中至少有一个无解.

$$(A, b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & x & 1 & y \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-2) \\ \leftarrow \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x-4 & -5 & y-2 \end{pmatrix}.$$

由此可见, 当 $x \neq 4$ 时, $\text{秩}(A) = \text{秩}(A, b_1) = \text{秩}(A, b_2) = 2$, 此时 $AX = B$ 有解;

$$(B, a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & y & 2 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & y & 2 & x \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & y & 2 & x \\ 0 & 1-3y & -5 & 2-3x \end{pmatrix}$$

由此可见, 当 $y = \frac{1}{3}$ 时, $\text{秩}(B) = 1 < 2 = \text{秩}(B, a_1) = 2$, 此时 $BY = A$ 无解.

综上所述, 当 $x \neq 4$ 且 $y = \frac{1}{3}$ 时, $AX = B$ 有解, 但 $BY = A$ 无解.

【例 4】

设线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ 求方程 (I)、(II) 的公共解.

解: 方程组 I 的对应矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 已是阶梯形矩阵, $r(A) = 2$, 可以直接得

出基础解系为 $\xi_1 = (-1, 1, 0, 1)^T$, $\xi_2 = (0, 0, 1, 0)^T$.

方程组 II 的对应矩阵是 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 也是阶梯形矩阵, $r(B) = 2$, 直接得出基础

解系为 $\eta_1 = (0, 1, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (-1, -1, 0, 1)^T$.

法 1: 求方程组 I, II 的公共解, 就是求方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 的解, 因为

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接求解, 得方程组 I, II 的公共解是 $k(-1, 1, 2, 1)^T$, 其中 k 是任意常数.

法2 在 I 的通解中找出满足方程组 II 的解, 则该解即是方程组 I, II 的公共解.

由方程组 I 的基础解是 $\xi_1 = (-1, 1, 0, 1)^T, \xi_2 = (0, 0, 1, 0)^T$, 其通解是

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(-1, 1, 0, 1)^T + k_2(0, 0, 1, 0)^T = (-k_1, k_1, k_2, k_1)^T.$$

将方程组 I 的通解代入方程组 II, 即得
$$\begin{cases} -k_1 - k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 - k_2 + k_1 = 0, \end{cases}$$
 解得 $k_2 = 2k_1$.

故当 $k_2 = 2k_1$ 时, 解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 也满足方程组 II (显然是方程组 I 的解), 故

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\xi_1 + 2k_1\xi_2 = k_1(-1, 1, 2, 1)^T \quad (k_1 \text{ 是任意常数})$$

是方程组 I, II 的公共解.

同样, 将方程组 II 的通解代入方程组 I, 从方程组 II 的通解中选择满足方程组 I (确定任意常数) 的解, 则该解同样是方程组 I, II 的公共解.

法3 在方程组 I, II 的通解中, 找出它们的公共解, 即找出既可由方程组 I 的基础解系线性表出, 又可由方程组 II 的基础解系线性表出的解.

由方程组 I 的基础解是 $\xi_1 = (-1, 1, 0, 1)^T, \xi_2 = (0, 0, 1, 0)^T$.

方程组 II 的基础解系是 $\eta_1 = (0, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-1, -1, 0, 1)^T$.

令 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = l_1\eta_1 + l_2\eta_2$, 即求解方程 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 - l_1\eta_1 - l_2\eta_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} -k_1 + l_2 = 0, \\ k_1 - l_1 + l_2 = 0, \\ k_2 - l_1 = 0, \\ k_1 - l_2 = 0. \end{cases}$$

解得 $l_1 = k_2 = 2k_1 = 2l_2 = \lambda$, 即

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\xi_1 + 2k_1\xi_2 = k_1(\xi_1 + 2\xi_2) = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 = 2l_2\eta_1 + l_2\eta_2 = l_2(2\eta_1 + \eta_2) = \lambda(-1, 1, 2, 1)^T.$$

是方程组 I, II 的公共解.

【例 5】

$$\text{已知线性方程组(I)} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + ax_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + bx_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = c, \end{cases} \text{ 和}$$

$$\text{线性方程组(II)} \begin{cases} x_1 + x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_3 + x_4 = -1, \end{cases} \text{ 是同解方程组. 求 } a, b, c.$$

【等价命题：已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ b \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ 与向量组

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ 等价, 求 } a, b, c. \text{】}$$

解：命题等价于 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 对

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & b & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 & c \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & b-1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 3 & c-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & c-5 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & b+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 & c-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & b+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 & c-4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$$

得 $a = -1, b = -2, c = 4$.

【例 6】

设向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ 等价。

- (1) 求向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩;
- (2) 求参数 a, b, c 的值;
- (3) 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 求矩阵 X , 使得 $AX = B$ 。

解: 1. 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ 的秩为 2,

而向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 α_1, α_2 等价,

所以 $\text{秩}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \text{秩}(\alpha_1, \alpha_2) = 2$ 。

解: 2. $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-b) \\ \times(-c) \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{matrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-b-c & 2+b-c & a-b-c \end{pmatrix}$$

由 1 知: $1-b-c = 2+b-c = a-b-c = 0$,

由此可得 $a = 1, b = -1/2, c = 3/2$ 。

解: 3. 因为 $A = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A_1 \end{pmatrix}$,

其中 E 为 2 阶单位矩阵,

若矩阵 X 满足 $AX = B$, 则 X 为 2×3 矩阵,

$$\text{且 } AX = \begin{pmatrix} E \\ A_1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} EX \\ A_1 X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ A_1 X \end{pmatrix},$$

可见 X 为 B 的前两行元素构成子矩阵,

$$\text{即 } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

新东方
在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

第3部分 特征值、特征向量与二次型 (7)

【例1】

设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + 2A - 3E = O$, 若 $r(A - E) = 1$, 则二次型 $X^T A X$ 在正交变换下的标准形是 ().

- (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$ (B) $y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2 - 3y_4^2$
 (C) $y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2 - 3y_4^2$ (D) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$

答案: 选 (A).

解: $A^2 + 2A - 3E = O$, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, $(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$, $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -3$.

由于 $r(A - E) = 1$, $(A - E)x = 0$ 有三个无关的解, 所以 $\lambda_1 = 1$ 为 A 的三重特征值, 从而 $\lambda_4 = -3$ 为 A 的单根特征值, 从而 A 的特征值为 $1, 1, 1, -3$, 选 (A).

【例2】

设 A, B 为 2 阶方阵, 且 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- (I) 若 $|A| < 0$, 证明 A 相似于对角阵;
 (II) 若 $bc > 0$, 证明 A 可相似于对角阵;
 (III) 若 $|A| < 0$, 且 $AB = BA$, 证明 B 可相似于对角阵;
 (IV) 若 $a + d = 2, ad - bc = 1, b, c$ 不全为 0, 证明 A 不与任何对角阵相似.
 (V) 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 不与对角阵相似, 则参数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

证明: (I) $|A| < 0$, 则 A 的两个特征值异号, 故 A 有 2 个不同的特征值, 所以 A 相似于对角阵;

$$(II) |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - bc, \quad \Delta = (a-b)^2 + 4bc > 0$$

从而 A 有 2 个不同的特征值, 所以 A 相似于对角阵;

$$(III) \text{ 因为 } |A| < 0, \text{ 由 (I) 可知, 存在可逆矩阵 } P, \text{ 使得 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow A = P\Lambda P^{-1}.$$

$$AB = BA \Leftrightarrow P\Lambda P^{-1}B = BP\Lambda P^{-1} \Leftrightarrow \Lambda P^{-1}BP = P^{-1}BP\Lambda, \text{ 令 } P^{-1}BP = C,$$

$$\text{则 } \Lambda C = C\Lambda, \text{ 设 } C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

$$C\Lambda = \Lambda C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 x_1 = \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_2 \\ \lambda_1 x_3 = \lambda_2 x_3 \\ \lambda_2 x_4 = \lambda_2 x_4 \end{cases},$$

$$\text{因为 } \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \text{ 所以 } x_2 = x_3 = 0, \text{ 故 } C = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \text{ 故 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

故 B 可相似于对角阵.

(IV)

证明: 设 A 的特征值为 λ_1, λ_2 , 则 $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = 2, \lambda_1 \lambda_2 = |A| = ad - bc = 1$. 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

假若 A 相似于对角阵, 则存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 于是可得

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 但这与 } b, c \text{ 不全为零矛盾! 所以 } A \text{ 不与任何对角阵相似.}$$

(V)

解: 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 不与对角阵相似

$\Leftrightarrow A$ 有 2 个相同的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2$
且只有 1 个线性无关的特征向量.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3/2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} 3/2 - 1 & -a \\ -2 & 3/2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -a \\ -2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{秩}(\lambda_1 E - A) = 1 \Rightarrow a = -1/8.$$

新东方在线

www.xdf.com

堂
电
子
教
材
系
列

【例 3】

设 A 为 3 阶方阵, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为三维线性无关的列向量, 且 $A\xi_1 = 2\xi_1$, $A\xi_2 = 3\xi_2 + 2\xi_3$,

$A\xi_3 = 2\xi_2 + 3\xi_3$, (I) 求 $|A|$; (II) 证明 A 可对角化, 若 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P ,

使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

解: (I) 记 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2\xi_1, 3\xi_2 + 2\xi_3, 2\xi_2 + 3\xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AQ = QB,$$

因为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 无关, 所以矩阵 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 可逆, 故 $|AQ| = |QB| \Rightarrow |A| = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$.

(II) 解法一. 由 (I) $AQ = QB$, 即 $Q^{-1}AQ = B$, 从而 A, B 相似.

$$\text{又 } |B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda), \text{ 得 } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$$

因为 A, B 有相似的特征值, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$, 故 A 可对角化.

$$\text{当 } \lambda_1 = 2 \text{ 时, } B + E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{当 } \lambda_2 = 5 \text{ 时, } B - 5E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{当 } \lambda_3 = 1 \text{ 时, } B - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } U = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } U^{-1}BU = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $Q^{-1}AQ = B = UAU^{-1} \Rightarrow U^{-1}Q^{-1}AQU = \Lambda$

$$\text{记 } P = QU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解法二. $A\xi_1 = 2\xi_1$, $A\xi_2 = 3\xi_2 + 2\xi_3$, $A\xi_3 = 2\xi_2 + 3\xi_3$;

所以 $A\xi_1 = 2\xi_1$, $A(\xi_2 + \xi_3) = 5(\xi_2 + \xi_3)$, $A(\xi_2 - \xi_3) = (\xi_2 - \xi_3)$;

又因为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 无关, $\xi_2 + \xi_3, \xi_2 - \xi_3$ 均不为 0 向量, 从而可知 A 的特征值为:

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$, 由于 A 有 3 个不同的特征值, 故 A 可对角化.

$$(\xi_1, \xi_2 + \xi_3, \xi_2 - \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 $\xi_1, \xi_2 + \xi_3, \xi_2 - \xi_3$ 线性无关, 令 $P = (\xi_1, \xi_2 + \xi_3, \xi_2 - \xi_3)$, 则有

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \text{ 若 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

【例 4】

设 3 阶方阵 A 有特征值 1 (二重) 和 -1 , $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是其相应于特征值 1 的特征向量,

$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是其相应于特征值 -1 的特征向量.

I) 求 A 及 A^{999}

II) 若 3 阶实对称矩阵 B 特征值也是 1 (二重) 和 -1 , 证明: A 与 B 必定相似

解 1: 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda$, $A = PAP^{-1}$,

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 可得

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 于是 $A = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$A^{9999} = \underbrace{(PAP^{-1})(PAP^{-1}) \dots (PAP^{-1})}_{9999 \text{ 个 } (PAP^{-1})} = PA(P^{-1}P)A(P^{-1}P) \dots AP^{-1}$

$$= PAEA EA \dots AP^{-1} = PA^{9999}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^{9999} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{9999} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{9999} \end{pmatrix} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

证明 2: 若 3 阶实对称矩阵的特征值 B 也是 1(二重)和-1, 则 B 也与 A 相似, 同时由上一小题可知 A 与 Λ 相似, 所以 A 与 B 相似.

新东方
在线

WM

collearn.com

网络课堂
电子教材系列

【例 5】

假设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$.

I) 证明: 秩 $(2E - A) + \text{秩}(A) = n$, 并且矩阵 A 可相似对角化;

II) 若秩 $(A) = r$, 求行列式 $|A + E|$ 的值

证明 1: 设秩 $(A) = r$, 秩 $(2E - A) = s$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

由 $A^2 = 2A$ 得 $A(2E - A) = 2AE - A^2 = 2A - A^2 = 0$,

可见 $2E - A$ 的列向量都是 $Ax = 0$ 的解, 因而能由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示.

故 $2E - A$ 的列向量组的秩 $s \leq n - r$, 于是有 $s + r \leq n$, 即秩 $(2E - A) + \text{秩}(A) \leq n$.

另一方面, $n = \text{秩}(2E) = \text{秩}[(2E - A) + A] \leq \text{秩}(2E - A) + \text{秩}(A)$. 所以秩 $(2E - A) + \text{秩}(A) = n$.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为 A 的一个极大无关组, β_1, \dots, β_s 为 $2E - A$ 的一个极大无关组.

由 $A^2 = 2A$ 可得 $A(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = (2\alpha_1, \dots, 2\alpha_r)$, $A(2E - A) = 0(2E - A)$, $A(\beta_1, \dots, \beta_s) = (0\beta_1, \dots, 0\beta_s)$.

可见 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 和 β_1, \dots, β_s 分别是 A 的对应于特征值 2 和 0 的特征向量,

而且 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ 线性无关. 于是 A 一共有 n 个线性无的特征向量, 所以 A 相似于对角阵.

解 2: 根据上题的证明, 令 $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$, 则有

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{cccc} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} r \text{ 行} \\ \end{array} \right\} \text{记为 } A \\ \left. \begin{array}{l} s \text{ 行} \\ \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad |A+E| = \left| \begin{array}{cccc} 3 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 3 & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{array} \right| = 3^r,$$

$$|A+E| = |P^{-1} \cdot |A+E| \cdot |P| = |P^{-1}| \cdot |A+E| \cdot |P| = |P^{-1}(A+E)P| = |P^{-1}AP + P^{-1}EP| = |A+E| = 3^r.$$

【例 6】

已知三元二次型 $f = x^T Ax$ 的平方项系数均为 0 且 $|A| = -16$, $\alpha = (1, 2, -1)^T$ 满足 $A^* \alpha = -8\alpha$

(1) 求该二次型的表达式;

(2) 求正交变换 $x = Py$ 把二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型, 并写出所用的坐标变换;

(3) 若 $A + kE$ 正定, 求 k 的值;

(4) 在 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 条件下, 求 $f = x^T Ax$ 的最值.

【解析】 (1) $\because A^* \alpha = -8\alpha, \therefore AA^* \alpha = -8A\alpha, |A|\alpha = -8\alpha, -16\alpha = A\alpha, A\alpha = 2\alpha$,

由已知二次型 $f = x^T Ax$ 的平方项系数均为 0, 且 $A\alpha = 2\alpha$, 说明 α 是 A 的特征向量, 2 是其对应的特征值, 且

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{即有} \begin{cases} 2a_{12} - a_{13} = 2, \\ a_{12} - a_{23} = 4, \\ a_{13} + 2a_{23} = -2, \end{cases}$$

解得 $a_{12} = 2, a_{13} = 2, a_{23} = -2$,

所以, $f = x^T Ax = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$,

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \text{ 由 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4) = 0, \therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4.$$

当 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时,

$$\text{由 } (A - 2E)x = 0, \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即有 $x_1 - x_2 - x_3 = 0$,

新东方
在线

w.koollearn.com

网络课堂
电子教材系列

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 不全为零.}$$

$$\text{取 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda = \lambda_3 = -4$ 时,

$$\text{由 } (A + 4E)x = 0, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{即有} \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \neq 0. \text{ 取 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 α_1, α_2 正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{于是 } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{取 } \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

新东方在线

www.koollearn.com

网络课堂电子教材系列

将 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 单位化, 得

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

令 $x = Py$, 则 $f = x^T Ax = y^T P^T APy = y^T \Lambda y = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

(3) 因 $A + kE$ 的特征值为 $k+2, k+2, k-4$, $\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

所以当 $k > 4$ 时, 矩阵 $A + kE$ 正定.

(4) 在 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T \mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{E}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ 条件下,

$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 = 2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - 6y_3^2 = 2 - 6y_3^2$, 又 $0 \leq y_3^2 \leq 1$, 所以 $f_{\max} = 2, f_{\min} = -4$.

新东方
在线

www.koofarn.com

网络课堂
电子教材系列

【例 7】

已知 A 为三阶实对称阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, $|A| > 0$, P 为三阶可逆矩阵, P 的第一列为 $(1, 1, -1)^T$,

$$P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

(I) 求 A ;

(II) 设 $B = A + kE$, 当 k 为何值时, 二次曲面 $x^T Bx = -1$ 为圆柱面, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. 【数学一】

解: (I) 解法一 A^* 的特征值为 $1, -2, -2$, 又因为 $|A^*| = 4 = |A|^2$, 从而 $|A| = 2$, 故 A 的特征值为 $2, -1, -1$.

记 P 的第一列 $(1, 1, -1)^T = \alpha_1$, 由题意知 $A^* \alpha_1 = \alpha_1$, 所以 $A \alpha_1 = 2 \alpha_1$, 而对 A 的特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 对应的特征向量 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 满足 $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, 取 $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 2)^T$, 从而取矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 即有 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解法二 因为 $|A^*| = 4 = |A|^2$, 从而 $|A| = 2$,

$$P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \Lambda, \text{ 则 } A^*P = P\Lambda, \text{ 两边同乘 } A, \text{ 可知 } |A|P = AP\Lambda, \text{ 因为 } \Lambda \text{ 可逆, 故}$$

$$A = |A|P\Lambda^{-1}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

记 P 的第一列 $(1, 1, -1)^T = \alpha_1$, 由题意知 $A^* \alpha_1 = \alpha_1$, 而对 A^* 的特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ 对应的特征向量

$$(x_1, x_2, x_3)^T, \text{ 满足 } x_1 + x_2 - x_3 = 0, \text{ 取 } \alpha_2 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 2)^T, \text{ 从而取矩阵 } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{即有 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(II) $B = A + kE$, B 的特征值为 $2+k, -1+k, -1+k$, 在正交变换下

$$x^T Bx = (2+k)y_1^2 + (k-1)y_2^2 + (k-1)y_3^2 = -1,$$

可见当 $k = -2$ 时, 二次曲面化为 $3y_2^2 + 3y_3^2 = 1$ 为圆柱面.

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂
电子教材系列

三、概率统计部分（数学一、三）（30）

第 1 部分 随机事件与概率（2）

【例 1】

设 A, B 是随机事件, $P(A) = 0.4, P(AB) = 0.2, P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则 $P(A \cup B) =$ _____ .

【答案】 0.7

【分析】 由于 $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 因此 A, B 相互独立, 从而 $0.2 = P(AB) = P(A)P(B)$, 于是 $P(B) = 0.5$, 故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = 0.7$.

【例 2】

某种产品分正品和次品, 次品不许出厂. 出厂的产品 4 件装一箱, 检验前每箱中装入 0, 1, 2, 3, 4 件正品是等可能的, 并以箱为单位出售. 由于疏忽, 有一批产品未经检验就直接装箱出厂, 某客户打开其中的一箱, 从中任意取出一件是正品的条件下, 这一箱里没有次品的概率 = _____ .

【答案】 2/5

【分析】 令 $A = \{\text{取出为正品}\}$, $B_t = \{\text{箱子中有 } t \text{ 个正品}\}$, $t = 0, 1, 2, 3, 4$.

由已知条件, $P(B_t) = \frac{1}{5}$, $P(A|B_t) = \frac{t}{4}$, $t = 0, 1, 2, 3, 4$,

由全概率公式, $P(A) = \sum_{t=0}^4 P(B_t)P(A|B_t) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \sum_{t=0}^4 t = \frac{1}{2}$.

从一箱中取出一件是正品, 而这箱中没有次品, 即求 $P(B_4|A)$, 可用贝叶斯公式:

$$P(B_4|A) = \frac{P(B_4)P(A|B_4)}{P(A)} = \frac{2}{5}.$$

第 2 部分 一维随机变量分布及数字特征 (7)

【例题 1】

下列命题正确的是 () .

- (A) 任一随机变量的分布函数必连续
 (B) 任一连续型随机变量的概率密度必连续
 (C) 任一连续型随机变量的分布函数必连续
 (D) 任一连续型随机变量的分布函数必可导

分析: (A) 错, 因为任一离散型随机变量在分布点处^{右连续}连续, 非连续.

(B) 错, 例如 $X \sim U(0,1)$, 则 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 虽然在 $x=0,1$ 处不连续

(C) 对. 若 $f(x)$ 为连续型 $\Rightarrow f(x)$ 可积且 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ 可导 $\Rightarrow F(x)$ 连续且 $F'(x) = f(x)$
 若 $f(x)$ 有有限个跳跃点 $\Rightarrow f(x)$ 可积且 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dx$ 连续

(D) 错. 例如 $X \sim U(0,1)$ 其分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $x=0, x=1$ 处均不可导

新东方
在线

课堂
电子教材系列

【例题 2】

产品寿命 X 是一个随机变量,其分布函数与概率密度数分别为 $F(x), f(x)$. 产品已工作到时刻 x , 在时刻 x 后的单位时间 Δx 内发生失效的概率称为产品在时刻 x 的瞬时失效率, 记为 $\lambda(x)$,

$$(I) \text{ 证明: } \lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)};$$

(II) 设某产品寿命的失效率函数为 $\lambda(x) = \alpha$, 其中 $\alpha > 0$ 为参数, 求产品寿命 X 的数学期望;

【分析】 综合考查了条件概率、指数分布、导数定义、微分方程、数字特征等问题

【解】

$$\begin{aligned} (I) \quad \lambda(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x | X > x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x, X > x)}{\Delta x \cdot P(X > x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X \leq x + \Delta x) - P(X \leq x)}{\Delta x \cdot [1 - F(x)]} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{1 - F(x)} \\ &= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \end{aligned}$$

$$(II) \text{ 将 } \lambda(x) = \alpha \text{ 代入得 } \alpha = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} = (-\ln[1 - F(x)])',$$

两边积分得 $\int_0^x \alpha dt = \int_0^x (-\ln[1 - F(t)])' dt$,

$$\alpha x + C = -\ln[1 - F(x)], \text{ 即 } 1 - F(x) = e^{-(\alpha x + C)},$$

由 $F(0) = P(X \leq 0) = 0$, 得 $C = 0$,

$$\text{故} \quad F(x) = 1 - e^{-\alpha x},$$

即产品寿命服从指数分布, 所以 $EX = \frac{1}{\alpha}$.

【例题 3】

某种产品上的缺陷数 X 服从分布列 $P\{X=k\} = \frac{C}{2^{k+1}}$ ($k=0,1,2,\dots$)
求此种产品的平均缺陷数, 缺陷数方差, EX^2

分析: 由 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C}{2^{k+1}} = C \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = C \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = C = 1$.

由分布列 $P\{X=k\} = \frac{1}{2^{k+1}}$ ($k=0,1,2,\dots$) 知 $Y=X+1 \sim$ 几何分布 $Ge\left(\frac{1}{2}\right)$

则 $\frac{1}{2^{k+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2}$ ($k=0,1,2,\dots$)
可理解为前 k 次为失败, 第 $k+1$ 次为成功
故 $X+1$ 表示首次成功, 即服从几何分布
故 $Y=X+1 \sim Ge\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore EY = E(X+1) = EX + 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow EX = 1;$$

$$DY = D(X+1) = DX = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow DX = 2;$$

$$EX^2 = (EX)^2 + DX = 1^2 + 2 = 3.$$

【例题 4】

一袋中有 6 个正品 4 个次品, 按下列方式抽样:

每次取 1 个, 取后放回, 共取 n ($n \leq 10$) 次, 其中次品个数记为 X ,

若一次性取出 n 个 ($n \leq 10$), 其中次品个数记为 Y , 则下列正确的是 ().

- (A) $EX > EY$ (B) $EX < EY$
(C) $EX = EY$ (D) n 不同, EX, EY 大小不同.

【答案】C

【分析】由题意 $X \sim B\left(n, \frac{2}{5}\right)$, 故 $EX = \frac{2}{5}n$.

Y 服从超几何分布 $H(n, 10, 4)$, 故 $EY = n \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{5}n$.

$\therefore EX = EY$.

新东方
在线

3rn.com

网络课堂电子教材系列

【例题 5】

设 $X = \begin{cases} 1, A \text{发生} \\ 0, A \text{不发生} \end{cases}$, $Y = \begin{cases} 1, B \text{发生} \\ 0, B \text{不发生} \end{cases}$, 用 n_{ij} 表示下表中“ X 取值为 0 或 1、 Y 取值为 0 或 1”的个数,

记 $n_{i+} = \sum_{j=1}^2 n_{ij}$, $n_{+j} = \sum_{i=1}^2 n_{ij}$, $n = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n_{ij}$ ($i, j = 1, 2$), 下面表称为两因素的“四格表”.

	Y	1	0	
X				
1		n_{11}	n_{12}	n_{1+}
0		n_{21}	n_{22}	n_{2+}
		n_{+1}	n_{+2}	n

则下列命题中错误的是 ().

- (A) 若 n_{1+} 给定后, 则 n_{11} 服从二项分布 $B(n_{1+}, p)$, 其中 $p = P(B|A)$, 进一步 n_{12} 服从二项分布 $B(n_{1+}, 1-p)$;
- (B) 若 n_{1+} 、 n_{2+} 、 n_{+1} 、 n_{+2} 都给定, 则 n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 、 n_{22} 中只有一个是随机变量且服从二项分布;
- (C) 当 $n \cdot n_{ij} = n_{i+} \cdot n_{+j}$ ($i, j = 1, 2$) 时, X 与 Y 独立;
- (D) 若 X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 独立;

【答案】B

【分析】

(A) 若 n_{1+} 给定后, n_{11} 与 n_{12} 中只有一个是随机变量, 则 n_{11} 服从二项分布 $B(n_{1+}, p)$, 其中 $p = P(B|A)$, 进一步 $n_{12} = n_{1+} - n_{11}$ 服从二项分布 $B(n_{1+}, 1-p)$, A 正确;

(B) 若 n_{1+} 、 n_{2+} 、 n_{+1} 、 n_{+2} 都给定, 则 n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 、 n_{22} 中只有一个是随机变量, 但应该服从超几何分布, 例如 $n_{1+}=10$ 、 $n_{2+}=30$ 、 $n_{+1}=20$ 、 $n_{+2}=20$, 则 $n=40$, 相当于共有 40 个样本, 其中 10 个 A 发生,

若从中随机抽取 $n_{+1}=20$ 个, 则 20 个中含有 A 的个数 n_{11} 的分布列为 $P(n_{11} = k) = \frac{C_{10}^k C_{30}^{20-k}}{C_{40}^{20}}$ ($k = 0, 1, \dots, 10$),

即 $n_{11} \sim H(40, 10, 20)$; 故 B 不正确;

(C) 当 $n \cdot n_{ij} = n_{i+} \cdot n_{+j}$ ($i, j=1,2$) 时, 等式两边同除以 n^2 , 则 $\frac{n_{ij}}{n} = \frac{n_{i+}}{n} \cdot \frac{n_{+j}}{n}$ 等价于 $p_{ij} = p_{i+} \cdot p_{+j}$

($i, j=1,2$), 则 X 与 Y 独立, 故 C 正确;

(D) 若 $\text{cov}(X, Y) = EXY - EXEY = p_{11} - p_{1+} \cdot p_{+1} = 0$, 则 $p_{11} = p_{1+} \cdot p_{+1}$.

进一步 $p_{+1} - p_{11} = p_{+1} - p_{1+} \cdot p_{+1} \Rightarrow p_{21} = (1 - p_{1+})p_{+1} \Rightarrow p_{21} = p_{2+} \cdot p_{+1}$,

同理可得 $p_{12} = p_{1+} \cdot p_{+2}$ 、 $p_{22} = p_{2+} \cdot p_{+2}$, 则 X 与 Y 独立, 故 D 正确.

【例题 6】

随机变量 X 的概率分布为 $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$, X 的分布函数为 $F(x)$,

令 $Y = F(X)$, 则 $DY = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$, 则 $Y = F(X) = \begin{cases} 0, & X < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq X < 1 \\ 1, & 1 \leq X \end{cases}$.

$\therefore Y$ 的概率分布为 $\begin{array}{c|cc} Y & \frac{2}{3} & 1 \\ \hline P & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$

$$\therefore EY = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

$$EY^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{17}{27}$$

$$\therefore DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{17}{27} - \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{2}{81}$$

新东方
在线

教材系列

【例题 7】

$$\text{设 } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{8}, & 1 \leq |x| \leq 3, \text{ 令 } Y = g(X) = \begin{cases} X^2 + 1, & X < 1 \\ 2, & X \geq 1 \end{cases} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (I) $F_Y(y)$; (II) $Cov(X, Y)$.

【分析】一维随机变量函数的分布与数字特征问题

【解】

(I) $X \in [-3, 3]$, 则 $Y \in [1, 10]$

X 的分界点	-3	-1	1	3	0
Y 的分界点	10	2	2	2	1

①当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\emptyset) = 0$;

②当 $y \geq 10$ 时, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\Omega) = 1$;

③当 $1 \leq y < 2$ 时, 由全概率分解思想得

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(Y \leq y, X < 1) + P(Y \leq y, X \geq 1) \\ &= P(X^2 + 1 \leq y, X < 1) + P(2 \leq y, X \geq 1) \\ &= P(-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}, X < 1) + P(\emptyset) \\ &= P(-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}) + 0 \\ &= \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} \sqrt{y-1}; \end{aligned}$$

④当 $2 \leq y < 10$ 时, 由全概率分解思想得

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(Y \leq y, X < 1) + P(Y \leq y, X \geq 1) \\ &= P(X^2 + 1 \leq y, X < 1) + P(2 \leq y, X \geq 1) \\ &= P(-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}, X < 1) + P(X \geq 1) \\ &= P(-\sqrt{y-1} \leq X < 1) + P(X \geq 1) \\ &= \int_{-\sqrt{y-1}}^{-1} \frac{1}{8} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{4} dx + \int_1^3 \frac{1}{8} dx \end{aligned}$$

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂电子教材系列

$$= \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{y-1}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(\sqrt{y-1} + 5);$$

$$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{y-1}, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{1}{8}(\sqrt{y-1} + 5), & 2 \leq y < 10 \\ 1, & 10 \leq y \end{cases}.$$

$$(II) \operatorname{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY,$$

其中 $EX = 0$ (由密度函数对称性得).

$$E(XY) = E[Xg(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^1 x(x^2+1)f(x)dx + \int_1^{+\infty} x \cdot 2f(x)dx \quad \leftarrow \text{先根据 } g(x) \text{ 拆分积分限}$$

$$= \int_{-3}^{-1} x(x^2+1) \cdot \frac{1}{8} dx + \int_{-1}^1 x(x^2+1) \cdot \frac{1}{4} dx + \int_1^3 x \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} dx \quad \leftarrow \text{再根据 } f(x) \text{ 拆分积分限}$$

$$= -3 + 0 + \frac{1}{8}(3^2 - 1)$$

$$= -2.$$

综上: $\operatorname{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY = -2.$

新东方
在线

www.koolearn.com

网络课堂
电子教材系列

第 3 部分 二维随机变量及其数字特征 (7)

【例题 1】

已知二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	a	0.4
1	0.1	b

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 互相独立, 令 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 则 $P\{U+V=1\} =$ _____.

【答案】0.5

【分析】

解法 1:

先求出 (X, Y) 的联合分布列, 再求出 (U, V) 联合分布列, 最后求出 $P\{U+V=1\}$.

因为 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 独立,

所以, $P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0\}P\{X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\}$,

所以, $(a+0.4)(0.1+0.4) = 0.4$. 又 $a+0.4+0.1+b=1$, 综上得 $a=0.4, b=0.1$.

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	0.4
1	0.1	0.1

进一步得到:

$U \backslash V$	0	1
0	0.4	0.4
1	0.5	0.1

$\Rightarrow P\{U+V=1\} = P\{U=0, V=1\} + P\{U=1, V=0\} = 0 + 0.5 = 0.5$.

解法 2: 由极值分布特性得

$$P\{U+V=1\} = P\{X+Y=1\} = 0.1+0.4 = 0.5.$$

【例题 2】

随机变量 (X, Y) 的概率分布如下,

$X \setminus Y$	y_1	y_2
x_1	p_{11}	p_{12}
x_2	p_{21}	p_{22}

下列命题是 X 与 Y 独立的充要条件的为 ().

- (A) $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ (B) 秩 $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = 1$ (C) $\frac{p_{11}}{p_{21}} \neq \frac{p_{12}}{p_{22}}$ (D) $\forall p_{ij} \neq 0 (i, j=1, 2)$

【答案】 D

【分析】

分析: 当 X 与 Y 独立时, $p_{ij} = p_i \cdot p_j, \forall i, j$,

$\therefore \frac{p_{11}}{p_{21}} = \frac{p_{12}}{p_{22}} = \frac{p_{1\cdot}}{p_{2\cdot}}$, 即行成比例, 排除 (C);

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = 0$, 排除 (A);

\Leftrightarrow 秩 $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = 1$, (B) 正确;

(D) 反例:

$X \setminus Y$	y_1	y_2
x_1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
x_2	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

【例题 3】

设 (X, Y) 为二维连续型随机变量, 则下列公式各项都有意义条件下必定成立的有 () 个.

- ① $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
 ② $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)dy$
 ③ $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x)f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)dx}$
 ④ $P\{X < Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(y)f_Y(y)dy$ 其中 $F_X(y) = \int_{-\infty}^y f_X(x)dx$
- (A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

【答案】 A

【分析】 ①需要独立条件才成立；②应该为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)dy$ ；

$$\textcircled{3} f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)dx} \text{ 成立；}$$

④需要独立条件.

【例题 4】

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，下列各式都有意义，若 X 与 Y 独立，则下列式中必成立的个数为 ().

- (1) $EXY = EX \cdot EY$
 (2) $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$
 (3) $P\{X > x, Y > y\} = 1 - F_X(x)F_Y(y)$
 (4) 令 $Z = X + Y$ ，则 $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)f_Y(y)dy$
 (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

【答案】 C

【分析】

- (1) 成立
 (2) 成立

$$\because f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x).$$

(3) 不成立

$$\begin{aligned} P\{X > x, Y > y\} &= 1 - P\{\overline{(X > x) \cap (Y > y)}\} = 1 - P\{\overline{(X > x) \cup (Y > y)}\} \\ &= 1 - P\{(X \leq x) \cup (Y \leq y)\} \\ &\neq 1 - F_X(x)F_Y(y). \end{aligned}$$

(4) 成立

$$\begin{aligned} \because F_Z(z) &= P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x,y)dxdy = \iint_{x+y \leq z} f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)dx \right] f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)f_Y(y)dy. \end{aligned}$$

【例 5】

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

(I) 求 $Z = X - 2Y$ 的概率密度;

(II) 求 $P\left\{X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right\}$.

【分析】二维随机变量函数的分布 条件概率 二维均匀分布

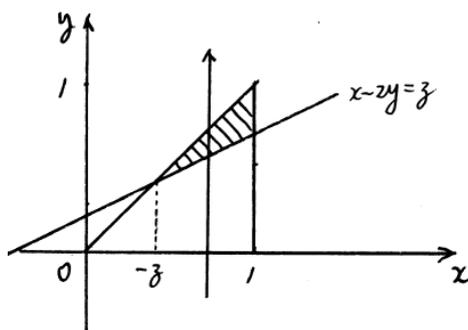
【解】

(I) (解法 1: 分布函数法)

由分布函数的定义 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X - 2Y \leq z\}$,

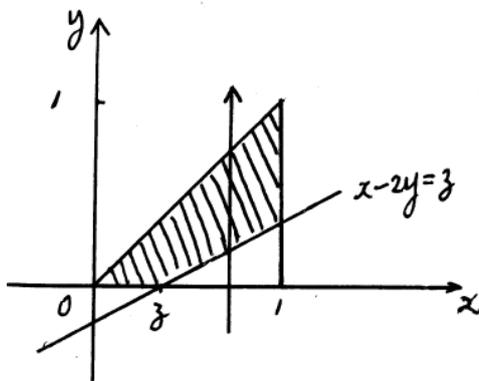
1) 当 $z < -1$ 时, $F_Z(z) = 0$;

2) 当 $-1 \leq z < 0$ 时, 积分区域如下图:



$$F_Z(z) = P\{X - 2Y \leq z\} = \iint_{x-2y \leq z} f(x, y) dx dy = 2 \int_{-z}^1 dx \int_{\frac{1}{2}(x-z)}^x dy = \frac{1}{2}(1+z)^2;$$

3) 当 $0 \leq z < 1$ 时, 积分区域如下图:



$$F_Z(z) = P\{X - 2Y \leq z\} = 1 - P\{X - 2Y > z\} = 1 - \iint_{x-2y > z} f(x, y) dx dy = 1 - \frac{1}{2}(1-z)^2;$$

4) 当 $z \geq 1$ 时, $F_Z(z) = 1$;

综上

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \frac{1}{2}(1+z)^2, & -1 \leq z < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-z)^2, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases},$$

$$\text{所以 } f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 1+z, & -1 \leq z < 0 \\ 1-z, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & z < 0 \text{ 或 } z \geq 1 \end{cases}.$$

(解法 2: 公式法)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+2y, y) dy$$

$$\text{密度函数非零要求 } \begin{cases} 0 < z+2y < 1 \\ 0 < y < z+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{z}{2} < y < \frac{1-z}{2} \\ 0 < y \\ y > -z \end{cases},$$

$$\text{则 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+2y, y) dy = \begin{cases} \int_{-z}^{\frac{1-z}{2}} 2dy = 1+z, & -1 \leq z < 0 \\ \int_0^{\frac{1-z}{2}} 2dy = 1-z, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & z < 0 \text{ 或 } z \geq 1 \end{cases}.$$

(II) 解法 1: 为求 $P\left\{X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right\}$, 先求 $f_{X|Y}(x|y)$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 2dx = 2(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

在 $0 < y < 1$ 条件下,

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂
电子教材系列

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $y = \frac{1}{2}$ 时,

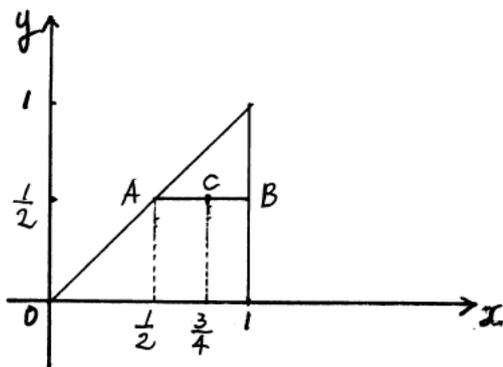
$$f_{X|Y}\left(x\left|\frac{1}{2}\right.\right) = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

所以

$$P\left\{X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2 dx = \frac{1}{2}.$$

解法 2: 利用二维均匀分布的条件分布是一维均匀分布.

即在条件 $\left\{Y = \frac{1}{2}\right\}$ 等价于在直线 AB 上随机投点, 再要求 $\left\{X \leq \frac{3}{4}\right\}$ 等价于范围缩小到 AC 上随机投点, 如下图,



所以

$$P\left\{X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right\} = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂电子教材系列

【例题 6】

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

求: (I) $Z = |X| + Y$ 的密度 $f_Z(z)$;

(II) EZ .

【分析】二维随机变量函数的分布与数字特征

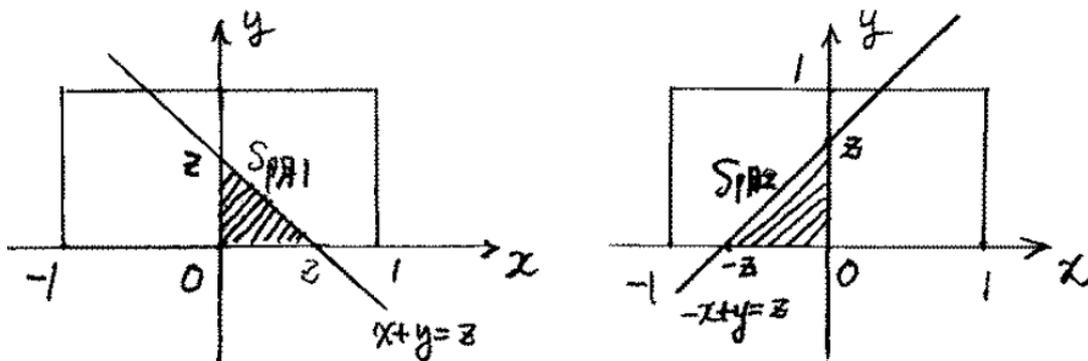
【解】

(I) 1) 当 $z < 0$ 时, $f_Z(z) = 0$; 2) 当 $z \geq 2$ 时, $f_Z(z) = 0$;

3) 当 $0 \leq z < 1$ 时,

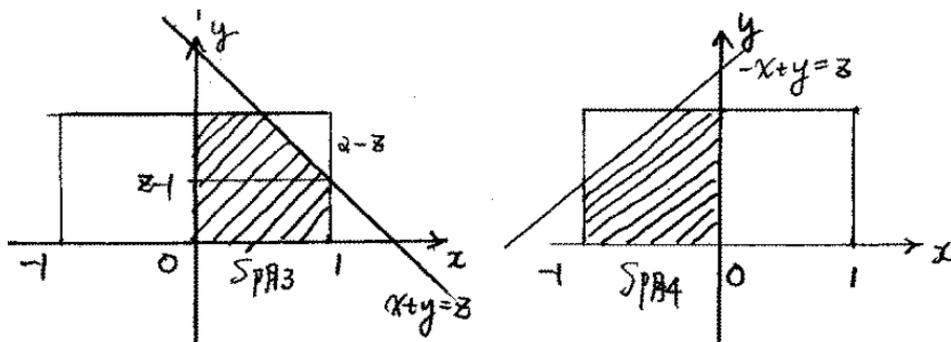
$$\begin{aligned} f_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(|X| + Y \leq z) \\ &= P(|X| + Y \leq z, X \geq 0) + P(|X| + Y \leq z, X < 0) \\ &= P(X + Y \leq z, X \geq 0) + P(-X + Y \leq z, X < 0) \end{aligned}$$

利用二维均匀分布几何意义, 积分区域如下:



$$\therefore F_Z(z) = \frac{S_{阴1}}{2} + \frac{S_{阴2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} z^2;$$

4) $1 \leq z \leq 2$ 时,



$$\therefore F_Z(z) = \frac{S_{\text{阴}3}}{2} + \frac{S_{\text{阴}4}}{2} = \frac{1}{2} \times \left[1 - \frac{1}{2}(2-z)^2 \right] \times 2 = 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2.$$

$$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{2}z^2, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2, & 1 \leq z \leq 2 \\ 1, & 2 \leq z \end{cases}, \quad \therefore f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(II) 用公式

$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^1 z \cdot z dz + \int_1^2 z(z-3) dz = 1.$$

【评注】如果发现密度关于 $z=1$ 对称，期望可以秒杀得到。

【例题 7】

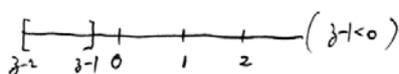
设随机变量 X 分布列为 $\begin{matrix} X & 1 & 2 \\ P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$ ，在 $X=i$ 条件下， Y 服从均匀分布 $U(0, i)$ ，记 $Z=X+Y$ ，求

(I) EZ (II) 若 $P\{Z > k\} = \frac{1}{4}$ ，求 k 取值范围

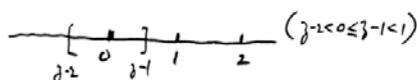
解：分析：直接求 Z 的分布，因为 Y 分布不均匀，比较困难。故先求 Z 的分布再求数字特征。

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = P\{X+Y \leq z, X=1\} + P\{X+Y \leq z, X=2\} \\ &= P\{X=1\} \cdot P\{X+Y \leq z | X=1\} + P\{X=2\} \cdot P\{X+Y \leq z | X=2\} \\ &= \frac{1}{2} \left[P\{Y \leq z-1 | X=1\} + P\{Y \leq z-2 | X=2\} \right] \end{aligned}$$

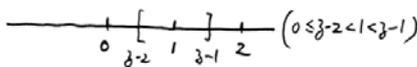
$$1) \frac{1}{2} z < 1 \text{ 时}, F_z(z) = 0;$$



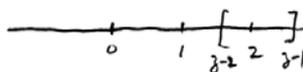
$$2) \frac{1}{2} | \leq z < 2 \text{ 时}, F_z(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{(z-1)-0}{1-0} + 0 \right] = \frac{1}{2}(z-1);$$



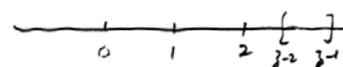
$$3) \frac{1}{2} 2 \leq z < 3 \text{ 时}, F_z(z) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(z-2)-0}{2-0} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{2};$$



$$4) \frac{1}{2} 3 \leq z < 4 \text{ 时}, F_z(z) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(z-2)-0}{2-0} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{2};$$



$$5) \frac{1}{2} 4 \leq z \text{ 时}, F_z(z) = \frac{1}{2} [1+1] = 1;$$



$$\text{综上 } F_z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ \frac{1}{2}(z-1), & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{2}, & 2 \leq z < 4 \\ 1, & 4 \leq z \end{cases} \Rightarrow f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{4}, & 2 \leq z < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\Rightarrow EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_z(z) dz = \int_1^2 z \times \frac{1}{2} dz + \int_2^4 z \times \frac{1}{4} dz = \frac{3}{4} + \frac{12}{8} = \frac{9}{4}$$

$$(II) \text{解法1: 利用分布函数 } F(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ \frac{1}{2}(z-1), & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{4}, & 2 \leq z < 4 \\ 1, & 4 \leq z \end{cases}$$

$$P\{Z > k\} = 1 - P\{Z \leq k\} = 1 - F(k) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow F(k) \leq \frac{1}{4}$$

$$1) k < 1 \text{ 时不成立 } 2) | k < 2 \text{ 时}, \frac{1}{2}(k-1) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow k \leq \frac{5}{2} \Rightarrow | k < 2$$

$$3) 2 \leq k < 4 \text{ 时}, \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow k \leq 3 \Rightarrow 2 \leq k \leq 3$$

$$\text{综上 } k \leq 3$$

$$\text{解法2: 利用密度函数 } f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{4}, & 2 \leq z < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$1) k < 1 \text{ 时}, P\{Z > k\} = \int_1^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^4 \frac{1}{4} dx = 1 \geq \frac{3}{4};$$

$$2) | k < 2 \text{ 时}, P\{Z > k\} = \int_k^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2}(2-k) + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow k \leq 2;$$

$$3) 2 \leq k < 4 \text{ 时}, P\{Z > k\} = \int_k^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}(4-k) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow 4-k \geq 3 \Rightarrow k \leq 3 \Rightarrow 2 \leq k \leq 3$$

$$4) 4 \leq k \text{ 时}, P\{Z > k\} = 0;$$

$$\text{综上 } k \leq 3$$

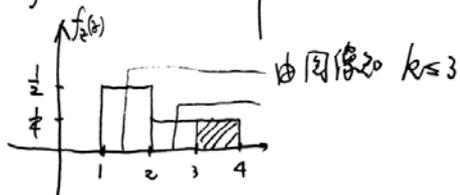
(注: 此处若写成 $k < 3$ 则也可)

新东方在线

w.koolearn.com

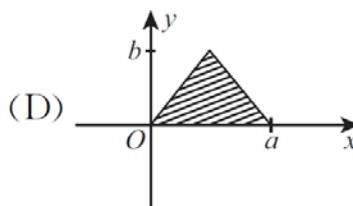
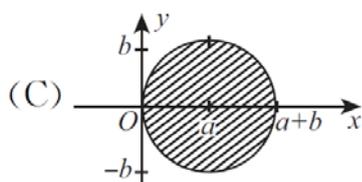
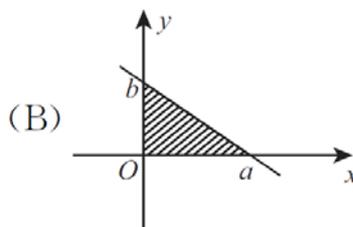
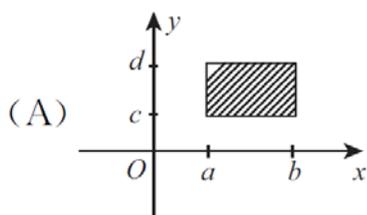
网络课堂电子教材系列

两问一般方法是分权积分或利用分布函数, 因为密度函数较简单
可以直接画图分析 (与 2008 年真题类似)



【例题 8】

已知 (X, Y) 在下列各区域上服从二维均匀分布, 则 X 与 Y 不独立且不相关的是 () .



【答案】C

【分析】

- (A) 矩形上二维均匀分布, 故 X 与 Y 独立, 所以 X 与 Y 不相关;
(B) (C) (D) 都为非矩形区域, 故 X 与 Y 不独立.

计算 $\text{cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY$, 二维均匀分布联合密度均为常数, 即 $f(x, y) = \frac{1}{S(G)}$,

$$EXY = \iint_G xyf(x, y)dxdy = \iint_G xy \frac{1}{S(G)}dxdy, \text{ 其中被积函数 } xy \frac{1}{S(G)} \text{ 分别关于 } x/y \text{ 是奇函数, 若积分区域}$$

关于 x/y 是对称的, 则 $EXY = 0$.

所以 (C) 中积分区域关于 x 轴对称, 故 $EXY = 0$, $EY = 0$, 所以 X 与 Y 不相关.

而 (B), (D) 无对称性, 故排除.

新东方
在线

网络课堂
电子教材系列

第 4 部分 数字特征、大数定律、中心极限定理 (2)

【例题 1】

设 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-x^2}$ ($-\infty < x < \infty$), 则 $E(X^2 e^X) =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}}$

【分析】 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-x^2} dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \cdot \sqrt{\pi} \therefore A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2 \times \frac{1}{2}}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\text{故 } X \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{则 } E(X^2 e^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+x} dx$$

$$= e^{\frac{1}{4}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2 \times \frac{1}{2}}} dx$$

$$= e^{\frac{1}{4}} \cdot EY^2 \quad (\text{其中 } Y \sim N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

$$= e^{\frac{1}{4}} \cdot [DY + (EY)^2]$$

$$= e^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}}.$$

新东方
在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

【例题 2】

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $U(0,1)$ 的简单随机样本, 当 n 充分大时, 变量 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从 ().

- (A) $\chi^2(n)$ (B) $N(0,1)$ (C) $N(\frac{1}{3}, \frac{4}{45})$ (D) $N(\frac{1}{3}, \frac{4}{45n})$

【答案】 D**【分析】** 由题意 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 独立同分布且

$$EX_i^2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{12} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{3}, \quad EZ_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{1}{3},$$

$$DX_i^2 = DX^2 = EX^4 - (EX^2)^2 = \frac{1}{5} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{45}, \quad DZ_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i^2 = \frac{4}{45n},$$

由中心极限定理知, $Z_n \sim N(\frac{1}{3}, \frac{4}{45n})$.

第 5 部分 数理统计 (数学一、数学三公共部分) (5)**【例题 1】**

设 X_1, \dots, X_n 是总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记

$$Y_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i, \quad Y_2 = \frac{1}{6} \sum_{j=5}^{10} X_j,$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^4 (X_i - \mu)^2, \quad S_2^2 = \sum_{j=5}^{10} (X_j - Y_2)^2.$$

则下列选项中不正确的是 ().

(A) $Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{5}{12})$

(B) $P\left\{2\sqrt{3}\left(\frac{Y_1 - Y_2}{S_2}\right) > 0\right\} = \frac{1}{2}$

(C) $D(S_1^2 + S_2^2) = 20$

(D) 当 $\mu = 0$ 时, 令 $Q = \frac{5X_1^2}{S_2^2}$, 若给定 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 满足 $P(F > F_\alpha(5, 1)) = \alpha$, 则 $P(Q < F_{1-\alpha}(1, 5)) = \alpha$.

【答案】 C**【分析】** X_i 独立同分布服从 $N(\mu, 1)$, 则:

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂
电子教材系列

(A) $Y_1 \sim N(\mu, \frac{1}{4}), Y_2 \sim N(\mu, \frac{1}{6})$ 且独立 $\therefore Y_1 - Y_2 \sim N(\mu - \mu, \frac{1}{4} + \frac{1}{6}) = N(0, \frac{5}{12})$, 故 (A) 正确;

(B) 由 (A) 知 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{\frac{5}{12}}} \sim N(0, 1)$, 又 $S_2^2 \sim \chi^2(5)$, S_2^2 与 Y_1, Y_2 均独立,

$$\therefore T = \frac{(Y_1 - Y_2) / \sqrt{\frac{5}{12}}}{\sqrt{S_2^2/5}} = \sqrt{12} \left(\frac{Y_1 - Y_2}{S_2} \right) \sim t(5)$$

由 t 分布对称性知 $P(T > 0) = \frac{1}{2}$, 故 (B) 正确;

(C) $S_1^2 = \sum_{i=1}^4 (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(4), S_2^2 = \sum_{j=5}^{10} (X_j - Y_2)^2 \sim \chi^2(5)$, 又 S_1^2, S_2^2 独立,

$\therefore S_1^2 + S_2^2 \sim \chi^2(9), \therefore D(S_1^2 + S_2^2) = 2 \times 9 = 18$, 故 (C) 不正确;

(D) 当 $\mu = 0$ 时, $X_1^2 \sim \chi^2(1), S_2^2 \sim \chi^2(5)$, 又 X_1^2 与 S_2^2 独立, $\therefore Q = \frac{X_1^2/1}{S_2^2/5} = \frac{5X_1^2}{S_2^2} \sim F(1, 5)$.

$$\therefore P(Q < F_{1-\alpha}(1, 5)) = P\left(\frac{1}{Q} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(1, 5)}\right) = P(F > F_{\alpha}(5, 1)) = \alpha;$$

综上, 选 (C).

【例题 2】

设 X_1, X_2, \dots, X_{2n} 是总体参数 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, 令 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} X_k$, 则

$$D\left[\sum_{k=1}^n (X_{2k-1} + X_{2k} - 2\bar{X})^2\right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $128(n-1)$

【分析】

令 $Y_k = X_{2k-1} + X_{2k} \sim N(0, 8)$, 而 $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_{2k-1} + X_{2k}) = \frac{1}{n} \cdot 2n\bar{X} = 2\bar{X}$, 得

$$\frac{\sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2}{8} \sim \chi^2(n-1),$$

$$\therefore D \left[\frac{\sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2}{8} \right] = 2(n-1).$$

$$\therefore D \left[\sum_{k=1}^n (X_{2k-1} + X_{2k} - 2\bar{X})^2 \right] = D \left[\sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2 \right] = 128(n-1).$$

【例题 3】

罐中有 N 个硬币，其中有 θ 个是普通硬币（掷出正面与反面的概率各为 0.5）其余 $N - \theta$ 个硬币两面都是正面，从罐中随机取出一个硬币，把它连掷两次，记下结果，但不去查看它属于哪种硬币，如此重复 n 次，若掷出 0 次、1 次、2 次正面的次数分别为 n_0, n_1, n_2 ，($n_0 + n_1 + n_2 = n$)

【数学一】

- (I) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ ，最大似然估计 $\hat{\theta}_2$ ；
 (II) 试问 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是否为 θ 无偏估计？
 (III) 当 $N = n = 10$ 时，试问 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效？

【数学三】

- (I) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ ，最大似然估计 $\hat{\theta}_2$ ；
 (II) 求 $E\hat{\theta}_1, E\hat{\theta}_2$ ；
 (III) 求 $D\hat{\theta}_2$ ；

【分析】全概率公式 矩估计 最大似然估计 估计量数字特征

【数学一详解】设 X 为连掷两次正面出现的次数， $A = \{\text{取出的硬币为普通硬币}\}$ ，则由全概率公式得

$$P(X=0) = P(A)P(X=0|A) + P(\bar{A})P(X=0|\bar{A}) = \frac{\theta}{N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{N-\theta}{N}\right) \cdot 0 = \frac{\theta}{4N},$$

$$P(X=1) = P(A)P(X=1|A) + P(\bar{A})P(X=1|\bar{A}) = \frac{\theta}{N} \cdot C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{N-\theta}{N}\right) \cdot 0 = \frac{\theta}{2N},$$

$$P(X=2) = P(A)P(X=2|A) + P(\bar{A})P(X=2|\bar{A}) = \frac{\theta}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{N-\theta}{N}\right) \cdot 1 = \frac{4N-3\theta}{4N},$$

即 X 的分布为：

X	0	1	2
P	$\frac{\theta}{4N}$	$\frac{\theta}{2N}$	$\frac{4N-3\theta}{4N}$

(I) 由 $\bar{X} = EX = 0 \cdot \frac{\theta}{4N} + 1 \cdot \frac{\theta}{2N} + 2 \cdot \frac{4N-3\theta}{4N} = \frac{2N-\theta}{N}$, 解出得 θ 的矩估计为:

$$\hat{\theta}_1 = N(2 - \bar{X}).$$

又 $\bar{X} = \frac{0 \times n_0 + 1 \times n_1 + 2 \times n_2}{n} = \frac{n_1 + 2n_2}{n}$ 代入得

$$\hat{\theta}_1 = N(2 - \bar{X}) = N \left[2 - \frac{1}{n}(n_1 + 2n_2) \right] = \frac{N}{n}(2n - n_1 - 2n_2) = \frac{N}{n}(2n_0 + n_1).$$

似然函数 $L(\theta) = \left(\frac{\theta}{4N}\right)^{n_0} \left(\frac{\theta}{2N}\right)^{n_1} \left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right)^{n_2}$

$$\ln L = n_0 \cdot [\ln \theta - \ln(4N)] + n_1 [\ln \theta - \ln(2N)] + n_2 [\ln(4N-3\theta) - \ln(4N)]$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n_0}{\theta} + \frac{n_1}{\theta} - \frac{3n_2}{4N-3\theta} = 0$$

得 θ 的最大似然估计为: $\hat{\theta}_2 = \frac{4N}{3n}(n_0 + n_1).$

(II) 由 $n_0 \sim B\left(n, \frac{\theta}{4N}\right), n_1 \sim B\left(n, \frac{\theta}{2N}\right), n_2 \sim B\left(n, \frac{4N-3\theta}{4N}\right),$

$$E\hat{\theta}_1 = E\left[\frac{N}{n}(2n_0 + n_1)\right] = \frac{N}{n}(2En_0 + En_1) = \frac{N}{n}\left(2n \frac{\theta}{4N} + n \frac{\theta}{2N}\right) = \theta.$$

$$E\hat{\theta}_2 = E\left[\frac{4N}{3n}(n_0 + n_1)\right] = \frac{4N}{3n}(En_0 + En_1) = \frac{4N}{3n}\left(n \frac{\theta}{4N} + n \frac{\theta}{2N}\right) = \theta.$$

由此可见 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 无偏估计.

(III)

$$\begin{aligned} D\hat{\theta}_2 &= D\left[\frac{4N}{3n}(n_0 + n_1)\right] = \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 D(n_0 + n_1) = \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 D(n - n_2) = \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 D(n_2) \\ &= \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 n \times \left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right) \frac{3\theta}{4N} = \frac{\theta}{3n}(4N-3\theta). \end{aligned}$$

当 $N = n = 10$ 时, $D\hat{\theta}_2 = \frac{\theta}{30}(40-3\theta) = \frac{4\theta}{3} - \frac{\theta^2}{10}, D\hat{\theta}_1 = D[N(2-\bar{X})] = N^2 D\bar{X} = N^2 \frac{DX}{n} = 10DX,$

$$EX = \frac{20-\theta}{10} = 2 - \frac{\theta}{10}, EX^2 = 4 - \frac{\theta}{4}, DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3\theta}{20} - \frac{\theta^2}{100}.$$

则 $D\hat{\theta}_1 = 10\left(\frac{3\theta}{20} - \frac{\theta^2}{100}\right) = \frac{3\theta}{2} - \frac{\theta^2}{10} > \frac{4\theta}{3} - \frac{\theta^2}{10} = D\hat{\theta}_2$, 所以 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 更有效.

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂
电子教材
系列

【数学三详解】

设 X 为连掷两次正面出现的次数, $A =$ “取出的硬币为普通硬币”, 则由全概率公式得

$$P(X=0) = P(A)P(X=0|A) + P(\bar{A})P(X=0|\bar{A}) = \frac{\theta}{N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{N-\theta}{N}\right) \cdot 0 = \frac{\theta}{4N},$$

$$P(X=1) = P(A)P(X=1|A) + P(\bar{A})P(X=1|\bar{A}) = \frac{\theta}{N} \cdot C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{N-\theta}{N}\right) \cdot 0 = \frac{\theta}{2N},$$

$$P(X=2) = P(A)P(X=2|A) + P(\bar{A})P(X=2|\bar{A}) = \frac{\theta}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{N-\theta}{N}\right) \cdot 1 = \frac{4N-3\theta}{4N},$$

即 X 的分布为:

X	0	1	2
P	$\frac{\theta}{4N}$	$\frac{\theta}{2N}$	$\frac{4N-3\theta}{4N}$

(I) 由 $\bar{X} = EX = 0 \cdot \frac{\theta}{4N} + 1 \cdot \frac{\theta}{2N} + 2 \cdot \frac{4N-3\theta}{4N} = \frac{2N-\theta}{N}$, 解出得 θ 的矩估计为:

$$\hat{\theta}_1 = N(2 - \bar{X}).$$

又 $\bar{X} = \frac{0 \times n_0 + 1 \times n_1 + 2 \times n_2}{n} = \frac{n_1 + 2n_2}{n}$ 代入得

$$\hat{\theta}_1 = N(2 - \bar{X}) = N \left[2 - \frac{1}{n}(n_1 + 2n_2) \right] = \frac{N}{n}(2n - n_1 - 2n_2) = \frac{N}{n}(2n_0 + n_1).$$

似然函数 $L(\theta) = \left(\frac{\theta}{4N}\right)^{n_0} \left(\frac{\theta}{2N}\right)^{n_1} \left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right)^{n_2}$

$$\ln L = n_0 \cdot [\ln \theta - \ln(4N)] + n_1 [\ln \theta - \ln(2N)] + n_2 [\ln(4N-3\theta) - \ln(4N)]$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n_0}{\theta} + \frac{n_1}{\theta} - \frac{3n_2}{4N-3\theta} = 0$$

得 θ 的极大似然估计为: $\hat{\theta}_2 = \frac{4N}{3n}(n_0 + n_1).$

(II) 由 $n_0 \sim B\left(n, \frac{\theta}{4N}\right), n_1 \sim B\left(n, \frac{\theta}{2N}\right), n_2 \sim B\left(n, \frac{4N-3\theta}{4N}\right),$

$$E\hat{\theta}_1 = E\left[\frac{N}{n}(2n_0 + n_1)\right] = \frac{N}{n}(2En_0 + En_1) = \frac{N}{n}\left(2n \frac{\theta}{4N} + n \frac{\theta}{2N}\right) = \theta.$$

$$E\hat{\theta}_2 = E\left[\frac{4N}{3n}(n_0 + n_1)\right] = \frac{4N}{3n}(En_0 + En_1) = \frac{4N}{3n}\left(n \frac{\theta}{4N} + n \frac{\theta}{2N}\right) = \theta.$$

(III)

新东方
在线

www.koolarn.com

网络课堂
电子教材系列

$$D\hat{\theta}_2 = D\left[\frac{4N}{3n}(n_0 + n_1)\right] = \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 D(n_0 + n_1) = \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 D(n - n_3) = \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 D(n_3)$$

$$= \left(\frac{4N}{3n}\right)^2 n \times \left(\frac{4N - 3\theta}{4N}\right) \frac{3\theta}{4N} = \frac{\theta}{3n}(4N - 3\theta).$$

【例题 4】

设来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) , 总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

($0 < \theta < 1$)

X 为简单随机样本 N_i 表示来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本 (容量为 n) 中第 i

个个数 ($i=1, 2, 3$)

- (1) 求 θ 的矩估计值和 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}$ 及 $\frac{1}{2}(3-\bar{X})$
- (2) 当样本值为 $(1, 1, 2, 1, 3, 2)$ 时求矩估计值与极大似然估计值
- (3) 求参数 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}$ 及 θ 的矩估计值 (求) 并 DT.
- (注: $E\bar{X} = \theta$ (求))

(1) 求矩估计值 $E\bar{X} = EX = 1 \cdot \theta^2 + 2 \cdot 2\theta(1-\theta) + 3 \cdot (1-\theta)^2 = 3 - 2\theta$

$$\therefore \hat{\theta}_{矩} = \frac{1}{2}(3 - \bar{X})$$

分别以 N_1, N_2 与 $n - N_1 - N_2$ 表示 (X_1, X_2, \dots, X_n) 中 1, 2, 3 出现的次数. 且

$$L(\theta) = (\theta^2)^{N_1} [2\theta(1-\theta)]^{N_2} [(1-\theta)^2]^{n - N_1 - N_2}$$

$$= 2^{N_2} \theta^{2N_1 + N_2} (1-\theta)^{2n - 2N_1 - N_2}$$

$$\ln L(\theta) = N_2 \ln 2 + (2N_1 + N_2) \ln \theta + (2n - 2N_1 - N_2) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2N_1 + N_2}{\theta} - \frac{2n - 2N_1 - N_2}{1-\theta} = 0$$

$$\therefore \hat{\theta}_{极大} = \frac{2N_1 + N_2}{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2N_1 + N_2}{n} \right)$$

新东方
在线

COM 网络课堂电子教材系列

$$(2) \bar{x} = \frac{1+2+1+3+2}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \hat{\theta}_{ZMLE} = \frac{1}{2}(3 - \bar{x}) = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

$$N_1=3, N_2=2 \text{ 时 } \hat{\theta}_{MLE} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \times 3 + 2}{6} \right) = \frac{2}{3}$$

$$L(\theta) = (\theta^2)^3 [2\theta(1-\theta)]^2 [(1-\theta)^2]^4$$

$$= 2^2 \cdot \theta^8 (1-\theta)^6$$

$$\ln L(\theta) = 2 \ln 2 + 8 \ln \theta + 6 \ln(1-\theta)$$

$$\theta) \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{8}{\theta} - \frac{6}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MLE} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \text{ 由 } N_1 \sim B(n, \theta^2), N_2 \sim B(n, 2\theta(1-\theta)), N_3 \sim B(n, (1-\theta)^2)$$

$$\begin{aligned} E T &= E \left(\sum_{i=1}^3 a_i N_i \right) = a_1 E(N_1) + a_2 E(N_2) + a_3 E(N_3) \\ &= a_1 n \theta^2 + a_2 n [2\theta(1-\theta)] + a_3 n (1-\theta)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{2N_1 + N_2}{n} = a_3 n + (2a_2 n - 2a_3 n)\theta + (a_1 n - 2a_2 n + a_3 n)\theta^2$$

$$\hat{=} \theta$$

$$\text{由 } \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{2n} \\ a_1 = \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\therefore T = \frac{1}{n} N_1 + \frac{1}{2n} N_2 = \frac{2N_1 + N_2}{2n} = \frac{1}{2}(3 - \bar{X})$$

$$\therefore D T = D \left[\frac{1}{2}(3 - \bar{X}) \right] = \frac{1}{4} D \bar{X} = \frac{D X}{4n} = \frac{-2\theta^2 + 2\theta}{4n} = \frac{-\theta^2 + \theta}{2n}$$

$$E X^2 = 1^2 \theta^2 + 2^2 \cdot 2\theta(1-\theta) + 3^2 (1-\theta)^2 = 2\theta^2 - 10\theta + 9$$

$$\therefore D X = E X^2 - (E X)^2 = 2\theta^2 - 10\theta + 9 - (3 - 2\theta)^2 = -2\theta^2 + 2\theta$$

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

【例题 5】

设 X_1, X_2, \dots, X_n 来自总体 X 的密度函数 $f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的一个简单随机样本,

(I) 求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_1$, 并求 $E(\hat{\theta}_1)$ 、 $D(\hat{\theta}_1)$;

(II) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_2$, 并求 $E(\hat{\theta}_2)$ 、 $D(\hat{\theta}_2)$;

(III) 数理统计中有一个均方误差准则 (MSE 准则):

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量, 称 $E(\hat{\theta} - \theta)^2$ 为估计量 $\hat{\theta}$ 与参数真值 θ 的均方误差, 简记为 $\text{MSE}(\hat{\theta})$, 即 $\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$.

求证: $\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = D(\hat{\theta}) + (E\hat{\theta} - \theta)^2$

(IV) 均方误差是评价点估计的最一般的标准, 均方误差越小的估计越好. 请问在均方误差准则下, 当 $n > 2$ 时, $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 哪个更好? 【数学一】

【解答】

(I) 似然函数为: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \{e^{-(x_i - \theta)}\} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta\right\}$

显然 $L(\theta)$ 是 θ 的单调增函数, 因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$.

又 $X_{(1)}$ 的密度函数为 $g(x) = ne^{-n(x-\theta)}, x > \theta$, 故

$$E(\hat{\theta}_1) = \int_{\theta}^{+\infty} xne^{-n(x-\theta)} dx = \int_0^{+\infty} (t+\theta)ne^{-nt} dt = \frac{1}{n} + \theta.$$

$$E(\hat{\theta}_1^2) = \int_{\theta}^{+\infty} x^2 ne^{-n(x-\theta)} dx = \int_0^{+\infty} (t^2 + 2\theta t + \theta^2) ne^{-nt} dt = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n}\theta + \theta^2,$$

$$D(\hat{\theta}_1) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 - \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 = \frac{1}{n^2}.$$

(II) 由于 $E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} xe^{-(x-\theta)} dx = \theta + 1$, 令 $\theta + 1 = \bar{X}$,

所以 θ 的矩估计为: $\hat{\theta}_2 = \bar{X} - 1.$

又 $E(X^2) = \int_{\theta}^{+\infty} x^2 e^{-(x-\theta)} dx = \theta^2 + 2\theta + 2, D(X) = 1,$

$$E(\hat{\theta}_2) = \theta, D(\hat{\theta}_2) = D(\bar{X} - 1) = \frac{1}{n}.$$

【评注】 利用平移方法可以快速得到 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的期望与方差。

(III) 由 MSE 准则的定义得到

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 = E[(\hat{\theta} - E\hat{\theta}) + (E\hat{\theta} - \theta)]^2 \\ &= E[(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2 + (E\hat{\theta} - \theta)^2 + 2(\hat{\theta} - E\hat{\theta})(E\hat{\theta} - \theta)] \\ &= E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2 + E[(E\hat{\theta} - \theta)^2] + 2E[(\hat{\theta} - E\hat{\theta})(E\hat{\theta} - \theta)] \\ &= E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2 + E[(E\hat{\theta} - \theta)^2] + 2(E\hat{\theta} - \theta)(E\hat{\theta} - E\hat{\theta}) \\ &= D(\hat{\theta}) + (E\hat{\theta} - \theta)^2. \end{aligned}$$

$$(IV) \text{ 由 (I) 得 } \text{MSE}(\hat{\theta}_1) = D(\hat{\theta}_1) + (E\hat{\theta}_1 - \theta)^2 = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \theta - \theta\right)^2 = \frac{2}{n^2},$$

$$\text{由 (II) } \text{MSE}(\hat{\theta}_2) = D(\hat{\theta}_2) + (E\hat{\theta}_2 - \theta)^2 = \frac{1}{n} + (\theta - \theta)^2 = \frac{1}{n},$$

所以当 $n > 2$ 时, $\text{MSE}(\hat{\theta}_1) < \text{MSE}(\hat{\theta}_2)$, 所以 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更好.

新东方
在线

www.koolearn.com

网络课堂
电子教材系列

第 6 部分 区间估计与假设检验 (数学一) (7)

【例 1】

I) 设连续性随机变量 X 的 r 阶绝对矩 $E(|X|^r), r > 0$ 存在, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r};$$

II) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 而 $a_n > 0$ 已知, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 1$,

则有 $\hat{\sigma}_n^2 = a_n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的一致估计.

【分析】期望不等式证明, 统计量数字特征, 一致估计

【解】I) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$

$$\begin{aligned} P(|X| \geq \varepsilon) &= \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx \leq \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{|x|^r}{\varepsilon^r} f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^r} \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^r f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^r} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx = \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}. \end{aligned}$$

II) 由于 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 即 $\frac{\hat{\sigma}_n^2}{a_n \sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

则 $E\left(\frac{\hat{\sigma}_n^2}{a_n \sigma^2}\right) = n-1, D\left(\frac{\hat{\sigma}_n^2}{a_n \sigma^2}\right) = 2(n-1), E(\hat{\sigma}_n^2) = (n-1)a_n \sigma^2, D(\hat{\sigma}_n^2) = 2(n-1)a_n^2 \sigma^4$.

$$E(\hat{\sigma}_n^4) = D(\hat{\sigma}_n^2) + [E(\hat{\sigma}_n^2)]^2 = (n-1)(n+1)a_n^2 \sigma^4$$

进而有

$$\begin{aligned} E[(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)^2] &= E(\hat{\sigma}_n^4) - 2\sigma^2 E(\hat{\sigma}_n^2) + \sigma^4 \\ &= [(n-1)(n+1)a_n^2 - 2(n-1)a_n + 1]\sigma^4 \\ &= [(na_n - 1)^2 + a_n(2 - a_n)]\sigma^4. \end{aligned}$$

又由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 由 I) 不等式: $P(|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)^2]}{\varepsilon^2}$;

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E[(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} [(na_n - 1)^2 + a_n(2 - a_n)]\sigma^4 = 0$, 即 $\hat{\sigma}_n^2$ 为 σ^2 的一致估计.

【例 2】

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 来自 X 的一个样本为： X_1, X_2, \dots, X_{2n} ，记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，

$T = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} (X_i - \mu)^2$ ，当 μ 已知时，基于 T 构造估计 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

() .

- (A) $\left(\frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}, \frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n)} \right)$ (B) $\left(\frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}, \frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n)} \right)$
- (C) $\left(\frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)}, \frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)} \right)$ (D) $\left(\frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)}, \frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)} \right)$

【答案】 D

【分析】 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=n+1}^{2n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ ，相互独立，则

$$\frac{T}{\sigma^2} \sim \chi^2(2n-1).$$

而 $P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1) < \frac{T}{\sigma^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)\right) = 1-\alpha$

即 $P\left(\frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)} < \sigma^2 < \frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)}\right) = 1-\alpha$ ，选 D.

新东方
在线

www.koollearn.com

网络课堂电子教材系列

【例题 3】

设总体 $X \sim N(\mu, 8)$, μ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_{32} 是取自总体 X 的一个简单随机样本, 如果以区间 $[\bar{X} - 1, \bar{X} + 1]$ 作为 μ 的置信区间, 则置信水平 = _____ . (精确到 3 位小数, 参考数值:

$\Phi(2) = 0.977, \Phi(3) \approx 0.999, \Phi(4) \approx 1$)

【答案】 0.954

【分析】 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{4}\right)$, 标准化 $\frac{\bar{X} - \mu}{1/2} \sim N(0, 1)$.

如果以区间 $[\bar{X} - 1, \bar{X} + 1]$ 作为 μ 的置信区间, 则置信水平

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\{\bar{X} - 1 \leq \mu \leq \bar{X} + 1\} \\ &= P\{-1 \leq \bar{X} - \mu \leq 1\} = P\left\{\frac{-1}{1/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{1/2} \leq \frac{1}{1/2}\right\} \\ &= 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.977 - 1 = 0.954. \end{aligned}$$

因此, 所求置信水平为 0.954.

【例题 4】

设某高校学生身高 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, 对同一批样本数据, 下列关于平均身高 μ 的置信区间与假设检验陈述错误的是 ().

(A) 对假设检验问题 $H_0: \mu = 165$ (厘米), $H_1: \mu \neq 165$ (厘米), 若在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 ,

则在显著性水平 $\alpha = 0.1$ 下必定拒绝 H_0 .

(B) 显著性水平 α 的意义是在 H_0 为真时, 由样本数据拒绝 H_0 的最大概率.

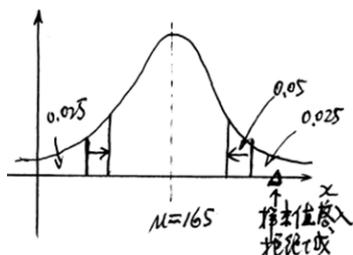
(C) 对于区间估计, 当置信水平 $1 - \alpha$ 变大时, μ 的置信区间长度变长.

(D) 当 $\alpha = 0.05$, 若由样本数据得到 μ 的置信区间为 $(165, 168)$ (厘米), 则此区间覆盖参数 μ 的置信水平为 $1 - \alpha = 95\%$.

【答案】 D

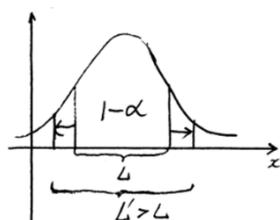
【分析】

(A) 若在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下样本值落入拒绝域, 当显著性水平增大到 $\alpha = 0.1$ 时, 样本数据必定落在新的拒绝域内, 所以必定拒绝 H_0 ;



(B) 显著性水平的教科书定义, 故正确;

(C) 对于区间估计, 当置信水平 $1-\alpha$ 变大时, μ 的置信区间长度 L 变长, 如下图所示:



(D) 置信区间准确理解应该为随机区间 $(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$ 参数覆盖参数 μ 的概率达

到 $1-\alpha = 95\%$. 对于一个具体的数字区间 $(165, 168)$, 要么有 $\mu \in (165, 168)$, 此时 $P\{165 < \mu < 168\} = 1$;

要么有 $\mu \notin (165, 168)$, 此时 $P\{165 < \mu < 168\} = 0$.

【例题 5】

所谓假设检验的 p 值, 是指在一个假设检验问题中, 利用观测值能够做出拒绝原假设的最小显著性水平. 如果 p 值小于显著性水平 α , 则相应的检验统计量的值落在拒绝域中. 因此在假设检验中, 可以利用 p 值来进行决策.

设总体 $X \sim N(\mu, 9)$, X_1, X_2, \dots, X_9 为来自总体 X 的一个简单随机样本, 其样本均值为 $\bar{x} = 12$, 检验假

设 $H_0: \mu = 10 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 10$, 检验的显著性水平 $\alpha = 0.05$, 则下列判断正确的是 (). (附:

$\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(2) = 0.9772$)

(A) 接受 H_0 , $p = 0.0546$ (B) 接受 H_0 , $p = 0.0456$

(C) 拒绝 H_0 , $p = 0.0456$ (D) 拒绝 H_0 , $p = 0.0546$

【答案】C

【分析】检验的拒绝域为: $\left\{ \left| \frac{\bar{X} - 10}{3} \sqrt{9} \right| \geq z_{0.025} = 1.96 \right\}$, 而 $|\bar{x} - 10| = |12 - 10| = 2 > 1.96$, 故拒绝原假设.

下面求检验的 p 值:

$$p = P\left(\left| \frac{\bar{X} - 10}{3} \sqrt{9} \right| > 2 \right) = 2[1 - \Phi(2)] = 2(1 - 0.9772) = 0.0456, \text{ 选 C.}$$

由 p 值的意义可知当显著性水平 α 降低到 0.0456 时仍会做出拒绝的选择.

【例题 6】

设 \bar{X} 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (其中 σ^2 未知) 的一个简单随机样本的样本均值, 若已知在置信水平 $1-\alpha$ 下, μ 的置信区间长度为 2, 则在显著性水平 α 下, 对于假设检验问题 $H_0: \mu=1, H_1: \mu \neq 1$, 要使得检验结果接受 H_0 , 则应有 ().

- (A) $\bar{X} \in (-1, 1)$ (B) $\bar{X} \in (-1, 3)$
 (C) $\bar{X} \in (-2, 2)$ (D) $\bar{X} \in (0, 2)$

【答案】D

【分析】如果 σ^2 未知, 置信区间为 $(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$, 则置信区间长度为 $2t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} = 2$, 则 $t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} = 1$. 要使得检验结果接受 H_0 , 则应有 $|T| = \left| \frac{\bar{X}-1}{S/\sqrt{n}} \right| < t_{\alpha/2}(n-1)$, 即 $\bar{X} \in \left(1 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, 1 + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = (0, 2)$ 时, 接受 H_0 .

【例题 7】

设 X_1, X_2, \dots, X_{10} 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 其中 μ, σ^2 未知.
 记 $\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i, \sigma^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2, p^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2$

(1) 则假设 $H_0: \mu \geq 1$ 的检验统计量及分布为 _____.

(2) μ 的单侧置信上限为 _____.
 置信度为 95%

解: (1) $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 1}{\sqrt{\frac{10 \cdot \sigma^2}{9}} / \sqrt{10}} = 3 \left(\frac{\bar{X} - 1}{\sigma} \right) \sim t(9)$

(2) $\bar{X} + t_{0.05}(9) \frac{S}{\sqrt{n}} = \bar{X} + t_{0.05}(9) \cdot \frac{\sigma}{3}$